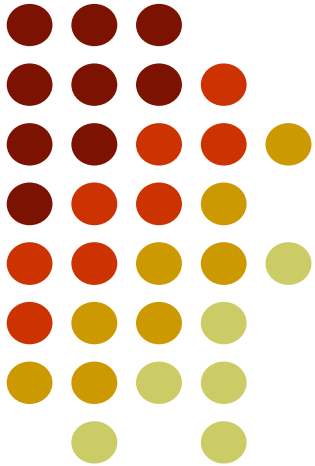
Rappels de logique pour Prolog

Logique des propositions

Logique des prédicats

Unification



Logique des propositions

On définit :

- Les propositions : a, b, c, …
- Les constantes : Vrai et Faux (V et F)
- Les connecteurs (ou opérateurs logique) :
  - ∧ (conjonction, ET)
  - ∨ (disjonction, OU)
  - ¬ (négation, NON)
  - ⇒ (implication)

Construction d'une proposition

- Une proposition est une expression qui est soit vraie, soit fausse, donc interprétée dans l'ensemble { Vrai, Faux }
- Si a et b sont des propositions,

  alors $\neg a$, $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \Rightarrow b$ sont des propositions
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité

Table de vérité

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

$A \Rightarrow B$ s'interprète par « si A alors B »

Exemple : il pleut $\Rightarrow$ la route est mouillée

Propriété des propositions

- Une proposition est valide si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation)
- Une proposition est consistante s'il existe une interprétation dans laquelle elle est vraie ; elle est inconsistante dans le cas contraire
- Problème : étant donnée une formule, est-elle valide ? consistante ?
- Exemple : que dire de la proposition :

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$$

Dressons la table de vérité

A	B	A ⇒ B	¬ A	¬ B	¬B ⇒ ¬A	(A⇒B) ⇒ (¬B ⇒ ¬A)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

(A⇒B) ⇒ (¬B ⇒ ¬A) est valide

Règles de transformation

Les propositions suivantes sont toujours vraies

- $a \vee \neg a$ (loi du tiers exclu)
- $((a \Rightarrow b) \wedge a) \Rightarrow b$ (modus ponens)
- $((a \Rightarrow b) \wedge \neg b) \Rightarrow \neg a$ (modus tollens)
- $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (contraposition)
- $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (double négation)
- $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$
- $a \vee a \Leftrightarrow a \wedge a \Leftrightarrow a$ (idempotence)

Loi de De Morgan

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

- Lois de De Morgan
  $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
  $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- Commutativité et associativité de $\vee$ et $\wedge$
- Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et de $\wedge$ par rapport à $\vee$:
  $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Une énigme policière

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
  - On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

Formalisation en calcul des propositions

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

Résolution de l'énigme

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

- Les informations de l'énoncé se traduisent par les implications suivantes :

  $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ t \Rightarrow \neg s$

- Il s'agit de prouver la validité de la proposition :

  $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r \wedge r \Rightarrow s \wedge t \Rightarrow \neg s) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg t)$

Démonstration

$(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r \wedge r \Rightarrow s \wedge t \Rightarrow \neg s) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg t)$

- Cette proposition ne peut être fausse que si
  - $(p \Rightarrow \neg t)$ est faux, c'est-à-dire si p et t vrais
  - et si la prémisse est vraie, c'est-à-dire toutes les implications vraies
- Comme t doit être vrai, s doit être faux, donc r faux, donc q faux, donc p faux, et il y a contradiction
- Donc la proposition est vraie : si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment.

Logique des prédicats

On définit :

- Les constantes : Vrai et Faux
- Les connecteurs : $\wedge$ $\vee$ $\neg$ $\Rightarrow$
- Les variables : x, y, z, …
- Les fonctions : f, g, h, …
- Les prédicats : p, q, r, … dont ceux d'arité 0 : a, b, c, …
- Les quantificateurs : $\forall$, $\exists$

Définitions

- Terme :
  - Une variable est un terme
  - Une constante est un terme
  - Si t1, t2, …, tn sont des termes, alors f(t1,t2,…,tn) est un terme
  - Exemple : fils(x)
- Atome :
  - Si t1, t2, …, tn sont des termes, et p un prédicat, alors p(t1,t2,…,tn) est un atome
  - Exemple : pere(x,y)

Construction d'une formule dans la logique des prédicats

- Vrai, Faux sont des formules
- Un atome est une formule
- Si F1 et F2 sont les formules, alors ¬F1, F1∧F2, F1∨F2, F1⇒F2 sont des formules
- Si F est une formule, ∀x F et ∃x F sont des formules
- Exemples :
  - ∀x pere(x,fils(x))
  - ∀x ∀y ∀z (pere(x,y)∧pere(y,z)) ⇒ papy(x,z)
- Remarque : la logique des propositions est un cas particulier de la logique des prédicats

Définitions

- Littéral
  - Un atome est un littéral (positif)
  - La négation d'un atome est un littéral (négatif)
- Une clause est une formule qui a la forme d'une disjonction de littéraux
  - Exemple : $P(x,y) \vee \neg Q(z)$
- Une clause concrète est une clause sans variable
- Une clause de Horn est une clause de la forme :

$$r_1 \wedge r_2 \wedge \ldots \wedge r_n \Rightarrow h$$

On peut toujours transformer une formule en un ensemble de clauses

Unification

- Deux termes t1 et t2 sont unifiables s'il existe une substitution σ des variables de t1 et t2 telle que σ t1 = σ t2
- Exemples
  - pere(X,jean) s'unifie avec pere(Y,Z)
    si X | Y et jean | Z
  - pere(jean,mere(X)) s'unifie avec pere(Y,mere(pierre))
    si jean | Y et X | pierre

L’énigme policière en Prolog

- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu’elle a vu l’ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l’a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L’ingénieur affirme n’avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l’ingénieur ment

L’énigme policière en Prolog

- Un individu entend un bruit s’il se trouve dans une pièce voisine de celle où le bruit a été produit
  - entend(Ind,Bruit) :- lieu(Ind,Piece1), lieu(Bruit,Piece2), voisin(Piece1,Piece2).
- Faits relatifs à l’énigme :
  - voisin(couloir,salle_de_conf).
  - voisin(salle_de_conf, couloir).
  - lieu(coup_de_feu,salle_de_conf).
  - lieu(ingenieur,couloir) :- secretaire_dit_vrai.
  - ingenieur_ment :- entend(ingenieur,coup_de_feu).

L’énigme policière en Prolog

- Hypothèse
  - secretaire_dit_vrai.
- Pour la démonstration, on pose la requête :
  - ingenieur_ment.