Corrigé de l'examen d'algèbre linéaire N°1 (Mai 2005)

El Methni M

Exercice I :

1) Montrer que $I=M_{(1,0)}\in E$; $J=M_{(0,1)}\in E$ et $0=M_{(0,0)}\in E$.

2) a) Soit $A=M_{(x,y)}\in E$ et $B=M_{(a,b)}\in E$ alors, après calcul, $A+B=M_{(x+a\,,\,y+b)}\in E$.

b) Soit $A=M_{(x,y)}\in E$ et $\lambda\in\mathbf{R}$ alors, après calcul, $\lambda A=M_{(\lambda x\,,\,\lambda y)}\in E$.

c) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

3) a) Soit $A=M_{(x,y)}\in E$ alors, après calcul, $A=xI+yJ$

b) Posons $xI+yJ=0$ et montrons que $x=y=0$.

$$xI+yJ=x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=y=0$$

c) Les deux questions précédentes établissent que I et J constituent une base de E et donc $\dim E=2$

4) a) $J^2=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}=-I+J$

b) Soit $A=M_{(x,y)}\in E$ et $B=M_{(a,b)}\in E$ alors, après calcul, $A.B=(xI+yJ)(aI+bJ)=xaI+(xb+ya)J+ybJ^2$ or $J^2=-I+J$ alors, après calcul, $A.B=(xa-yb)I+(xb+ya+yb)J\in E$.

5) a) $\det M_{(x,y)}=x^2+xy+y^2$

b) Si $x^2+xy+y^2>0$ alors il est évident que $(x,y)\neq(0,0)$

Inversement supposons $(x,y)\neq(0,0)$ alors $x^2+y^2>0$. Si x et y sont de même signe alors $xy>0$ et donc $x^2+xy+y^2>0$. Si x et y sont de signes contraires alors $-xy>0$ et comme $x^2+xy+y^2= x^2+2xy-xy+y^2=(x+y)^2+(-xy)>0$.

c) Comme $\det M_{(x,y)}=x^2+xy+y^2$ alors, d'après (b), à part 0 toutes les matrices de E sont inversibles.

d) Soit $A=M_{(x,y)}\in E$ calculons l'inverse de A par l'une des méthodes usuelles

$$A^{-1}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\begin{pmatrix}x+y&-y\\y&x\end{pmatrix}=M_{\left(\frac{x+y}{x^2+xy+y^2},\frac{-y}{x^2+xy+y^2}\right)}\in E$$

6) a) Soit $A=M_{(x,y)}\in E$ et $B=M_{(a,b)}\in E$ on vérifie immédiatement que $\varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B)$ et $\varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A)$.Par ailleurs $(x,y)=(0,0)\Rightarrow x=0$ et $y=0$ alors $\mathrm{Ker}\varphi=\{0\}$, et donc φ est injective et comme E et $\mathbf{R}^2$ sont de même dimension (2) alors φ est un isomorphisme.

b) $\varphi(I)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1)$ et $\varphi(J)=(0,1)=0(1,0)+1(0,1)$ donc $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Exercice II :

1) $D=(x^2+y^2+z^2+t^2)I_4$

2) $\det D=\det(x^2+y^2+z^2+t^2)I_4=(x^2+y^2+z^2+t^2)^4$

3) $\det D=\det A\,{}^tA=\det A\det{}^tA=\det A\det A=(\det A)^2$ donc $\det A=\pm(x^2+y^2+z^2+t^2)^2$. L'examen du coefficient de x^4 montre que $\det A=(x^2+y^2+z^2+t^2)^2$

4) Les matrices A inversibles sont celles dont le determinants est non nul, autrement dit les matrices A pour lesquelles l'un au moins des quatre coefficients x, y, z ou t est non nul.