ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE I :

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux de la forme $M_{(x,y))} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix}$ où x et y sont deux réels. $E = \left\{ M_{(x,y))} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ où } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que I, J et 0 sont trois éléments de E.

2) a) Montrer que la somme de deux éléments de E est un élément de E. (E est stable pour l'addition).

b) Montrer que le produit d'un élément de E par un réel est un élément de E. (E est stable pour la loi externe).

c) Que conclure sur E en termes d'espace vectoriel ?

3) a) Montrer que tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire de I et J.

b) Montrer que I et J sont deux matrices linéairement indépendantes.

c) Donner une base $\mathcal{B}$ et la dimension de E ?

4) a) Calculer J^2 et l'exprimer en fonction de I et J.

b) Montrer que le produit de deux éléments de E est un élément de E. (E est stable pour la multiplication).

5) a) Calculer det $M_{(x,y)}$

b) Montrer que pour tout couple (x,y) de réels on a : $(x,y)\neq(0,0) \Leftrightarrow x^2+xy+y^2>0$

c) Quels sont les éléments inversibles de E ?

d) Montrer que l'inverse d'un élément de E est un élément de E.

6) a) Montrer que l'application φ de E dans $\mathbf{R}^2$ qui à $M_{(x,y)}$ associe (x,y) est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) Donner sa matrice A, E étant muni de la base $\mathcal{B}$ et $\mathbf{R}^2$ de sa base canonique.

EXERCICE II :

On considère la matrice carrée d'ordre quatre à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$

1) Calculer $D=A.{}^tA$ (Indication : D est une matrice scalaire).

2) Calculer det D.

3) a) En déduire det A.

b) Caractériser les matrices A inversibles