Partiel d'Algèbre N°1 (Mars 2005)

EL METHNI M.

EXERCICE I :

On considère les matrices : $A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&1&3&1\\2&1&8&3&1&6&4\\4&0&12&4&1&9&7\\2&0&6&2&2&6&2\\5&0&15&5&2&12&8\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\-4&0&1&0&0\\-2&0&0&1&0\\-1&0&-1&0&1\end{pmatrix}$

On admet que P est <u>inversible</u>

1) Calculer $B=PA$. Que peut-on en conclure en termes de ligne-équivalence ?

2)

  a) Continuer les opérations élémentaires de lignes sur B pour obtenir la l.r.e R de A

  b) Quel est le rang de A ?

3) Donner toutes les combinaisons linéaires entre les colonnes de A.

4) On a admis que P est inversible, Justifier qu'elle l'est.

EXERCICE II :

Rappelons que si A et B sont deux matrices carrées qui commutent alors la formule du binôme est vérifiée : $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$ ou encore : $(A-B)^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}A^kB^{n-k}$

$(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}$ et $A^0=B^0=I$ matrice identité.

$\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3.

On considère les matrices : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

Pour tout triplet $(a, b, c)\in\mathbf{R}^3$ on considère la matrice $M_{(a,b,c)}=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a+c&b\\c&b&a\end{pmatrix}$ et on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les matrices $M_{(a,b,c)}$ où $(a, b, c)\in\mathbf{R}^3$

1) I, B et C sont-elles des matrices de $\mathcal{E}$? Justifier votre réponse.

2) B et C sont-elles inversibles ? Justifier votre réponse.

3) **a)** Calculer B^2, C^2, BC et CB

  b) Exprimer ces quatre matrices à l'aide de I, B et C

  c) Ces quatre matrices sont-elles des matrices de $\mathcal{E}$? Justifier votre réponse.

4) Montrer que les matrices I, B, et C sont linéairement indépendantes. ($\alpha I+\beta B+\gamma C=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$)

5) Montrer que toute matrice $M_{(a,b,c)}$ de $\mathcal{E}$ s'écrit $M_{(a,b,c)}=aI+bB+cC$. Terminer la phrase «toute matrice $M_{(a,b,c)}$ de $\mathcal{E}$ s'écrit comme ……..)

6) En utilisant l'écriture de la question (5), montrer que la somme de deux matrices de $\mathcal{E}$ est une matrice de $\mathcal{E}$. ($\mathcal{E}$ est stable par addition).

7) En utilisant l'écriture de la question (5), montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ est une matrice de $\mathcal{E}$. ($\mathcal{E}$ est stable par multiplication).

8) On considère la matrice $A = \frac{1}{\sqrt{2}} B$

a) Calculer, A^2 A^3 et A^4

b) Exprimer A^n en fonction de I, C et A en distinguant les cas n pair et n impair.

9) On considère la matrice $D = M_{(1,\sqrt{2},0)}$

a) Exprimer D en fonction de I et A.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $D^n = I + \alpha_n A + \beta_n A^2$ où $\alpha_n = \sum_{k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ $\beta_n = \sum_{k \text{ pair} \neq 0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ (<u>Indication</u> : formule du binôme)

c) En déduire une écriture de D^n comme combinaison linéaire de I, B et C

d) Montrer que $1+\alpha_n+\beta_n=3^n$ et que $1-\alpha_n+\beta_n=(-1)^n$(<u>Indication</u> : formule du binôme)

e) En déduire α_n et β_n en fonction de n.

10) Déduire de ce qui précède une écriture de D^n comme combinaison linéaire de I, B, C et n.