Travaux Dirigés N°1

Σomme & Πroduit

EL METHNI M.

Soit I un ensemble fini et x une application de I dans **R** ou **C** qui à chaque élément i de I fait correspondre un réel (ou un complexe) x_i. I est appelé <u>famille d'indices</u>, x <u>variable indicée ou indexée par i</u> et i est l'<u>indice</u>. De façon générale les éléments de I sont des entiers naturels successifs $I=\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou $I=\{5, 6, 7, \dots, n\}$ ou encore $I=\{p, p+1, p+2, \dots, n\}$. Dans toute la suite on prendra $I=\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $J=\{1, 2, 3, \dots, p\}$ et $(x_i)_{i\in I}$ (ou $(x_i)_{1\le i\le n}$) et $(y_j)_{j\in J}$ (ou $(y_j)_{1\le j\le p}$) sont deux familles de nombres réels (ou complexes). λ et μ sont deux réels (ou complexes) fixés.

Définition : On définit $\sigma_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{1\le i\le n} x_i = \sum_{i\in I} x_i$ par : $\sigma_0=0$ et $\sigma_{k+1}=\sigma_k+x_{k+1}$ pour $k\in[[0 \quad n-1]]$.

De même on définit $\pi_n = \prod_{i=1}^{i=n} x_i = \prod_{1\le i\le n} x_i = \prod_{i\in I} x_i$ par : $\pi_0=1$ et $\pi_{k+1}=\pi_k\times x_{k+1}$ pour $k\in[[0 \quad n-1]]$.

Partie I :

1) Justifier que :

a) $\sigma_n=x_1+x_2+\dots+x_n$ **b)** $\sigma_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{k=1}^{k=n} x_k = \sum_{p=1}^{p=n} x_p$

2) Calculer : $\sum_{i=1}^{i=5} x_i$ pour $x_i = i$ $\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ pour $x_k = 3$ $\sum_{p=3}^{p=11} x_p$ pour $x_p = p^2$

3) Justifier que : $\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=0}^{i=n-1} x_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{n-i}$

4) A-t-on $\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$? A-t-on $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}$?

5) Justifier que :

a) $\sum_{i=1}^{i=n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i + \sum_{i=1}^{i=n} y_i$ **b)** $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{i=n} x_i$

6) Sachant que : $\sum_{i=1}^{i=n} x_i = X$ et $\sum_{i=1}^{i=n} y_i = Y$ calculer

$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \lambda)$ $\sum_{i=1}^{i=n} (5x_i + 3y_i)$ $\sum_{i=1}^{i=n} (\lambda(x_i - 2) + \mu(y_i + \mu))$

7) Compléter : **a)** $\sum_{i=0}^{i=n} (x^{n-i} y^i) = x^n + y^n + \sum_{?}^{?} ?$ **b)** $\sum_{i=0}^{i=n} (x^{n-i} y^i) = \sum_{i=0}^{i=n-5} x^? y^? + \sum_{?}^{n} ?$

8) On pose : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = m$ (comment désigne-t-on ce nombre ?) Calculer $\sum_{i=1}^{i=n} \left[x_i - \sum_{j=1}^{j=n} \frac{x_j}{n} \right]$

Connaissiez-vous cette propriété ? Enoncez la en une phrase simple.

9) On considère une « liste double » $(x_i\, ;\, p_i)_{1\le i\le k}$ où x_i sont les notes obtenues par un étudiant à la matière i et p_i sont les coefficients de cette matière i. On pose : $\sum_{i=1}^{i=k} p_i = P$ et $m = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{i=k} p_i x_i$

Que vaut $\sum_{i=1}^{i=k} p_i (x_i - m)$? Connaissiez-vous cette propriété ? Enoncez la en une phrase simple.

10) On pose : $\sigma^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{i=k} p_i (x_i - m)^2$ comment désigne-t-on ce nombre ? Montrer que

$\sigma^2 = \dfrac{1}{P}\sum_{i=1}^{i=k} p_i x_i^2 - m^2$ Connaissiez-vous ce théorème ?

11) On considère une « liste double » $(x_i\,;\,y_i)_{1\leq i\leq k}$ où x_i sont les notes obtenues par un étudiant X à la matière i et y_i sont les notes obtenues par un étudiant Y à la même matière i. On pose : $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i = m_x \quad \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} y_i = m_y$ et $\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)$ comment désigne-t-on ce nombre ? Montrer que $\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - m_x m_y$ Connaissiez-vous ce théorème ?

Partie II :

1) Justifier que :

a) $\pi_n = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$. **b)** $\pi_n = \prod_{i=1}^{i=n} x_i = \prod_{k=1}^{k=n} x_k = \prod_{p=1}^{p=n} x_p$

2) Calculer : $\prod_{i=1}^{n} x_i$ pour $x_i = i$ $\quad \prod_{k=1}^{k=n} x_k$ pour $x_k = 3$ $\quad \prod_{p=3}^{p=11} x_p$ pour $x_p = p^2$

3) Justifier que : $\prod_{i=1}^{i=n} x_i = \prod_{i=0}^{i=n-1} x_{i+1} = \prod_{i=2}^{n+1} x_{i-1} = \prod_{i=0}^{n-1} x_{n-i}$

4) A-t-on :

a) $\prod_{i=1}^{i=n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{i=n} x_i \prod_{i=1}^{i=n} y_i$? **b)** $\prod_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{x_i} = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{i=n} x_i}$?

c) $\prod_{i=1}^{i=n}(x_i + y_i) = \prod_{i=1}^{i=n} x_i + \prod_{i=1}^{i=n} y_i$ **d)** $\prod_{i=1}^{i=n}(x_i)^p = \left(\prod_{i=1}^{i=n} x_i\right)^p$

5) Compléter :

a) $\prod_{i=1}^{i=n} \lambda x_i = \lambda^? \prod_{i=1}^{i=n} x_i$ **b)** $\prod_{i=1}^{i=n}(x_i - x)\prod_{i=1}^{i=n}(-x_i - x) = ?\prod_{i=1}^{i=n}(?-?)$

6) Montrer que : $\prod_{i=1}^{i=2n} i = \prod_{i=1}^{i=n}(2i-1)\prod_{i=1}^{i=n} 2i$ Ecrire cette égalité en termes de factoriel.

Partie III :

Soient $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ et $J=\{1, 2, \ldots, p\}$ deux familles d'indices on note $(x_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ (ou $(x_{ij})_{1\leq i\leq n\ 1\leq j\leq p}$) une variable indexée conjointement par I et J. On représente les x_{ij} par un « tableau » à n lignes (indexées par I) et à p colonnes (indexées par J).

1) Dresser le tableau $X=(x_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ dans les cas suivants:

a) $I=\{1, 2, 3\}$ et $J=\{1, 2, 3, 4\}$ et $x_{ij}=2i-j$ **b)** $I=\{1, 2, 3\} = J$ et $x_{ij}=1/(i+j-1)$

c) $I=\{1, 2, 3,4\} = J$ et $x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ **b)** $I=\{1, 2, 3, 4\} = J$ et $x_{ij} = \begin{cases} \text{a si } i = j \\ \text{b si } i > j \\ \text{c sinon} \end{cases}$

2) Soit $X=(x_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ un tableau « carré » $I=J=\{1, 2, \ldots, n\}$. Matérialiser sur ce tableau les éléments suivants : $x_{ii}\ i\in I$; $x_{3j}\ j\in J$; $x_{ii}\ i>j$; $x_{n-i+1,i}\ i\in I$; $\sum_{i=1}^{i=n} x_{ii} \quad \sum_{i\in I} x_{i3} \quad \prod_{j=1}^{n} x_{2j} \quad \prod_{i=1}^{n} x_{n-i+1,i}$

3) Quelle signification donneriez-vous à $\sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=p} x_{ij}$?

4) A-t-on $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$?

5) Dans le cas où $I=J$ caractériser (sur le tableau) $\sum_{1\le i<j\le n} x_{ij}$

6) Soient $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ et $J=\{1, 2, \ldots, p\}$ deux familles d'indices. On considère deux tableaux $X=(x_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ et $Y=(y_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ .La <u>somme</u> de X et Y est un tableau $Z=X\oplus Y=(z_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ où $\forall i\in I$ et $\forall j\in J$ $z_{ij}=x_{ij}+y_{ij}$.

a) Montrer que : $X\oplus Y=Y\oplus X$ (l'addition est <u>commutative</u>)

b) Montrer que : $X\oplus(Y\oplus Z)=(X\oplus Y)\oplus Z$ (l'addition est <u>associative</u>)

c) Existe-t-il un tableau T tel que : $X\oplus T=T\oplus X=X$? (existence d'un <u>élément neutre</u>). Quelle notation suggériez-vous pour T ?

d) Existe-t-il un tableau U tel que : $X\oplus U=U\oplus X=T$? (existence d'un <u>opposé</u>) (T étant le tableau de la question précédente). Quelle notation suggériez-vous pour U ?

7) Soient $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ et $J=\{1, 2, \ldots, p\}$ deux familles d'indices. On considère deux tableaux $X=(x_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ et $Y=(y_{ij})_{i\in I\ j\in J}$. Le <u>transposé</u> de X est un tableau $Z={}^tX=(z_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ où $\forall i\in I$ et $\forall j\in J$ $z_{ij}=x_{ji}$.

a) Montrer que : ${}^t(X\oplus Y)={}^tX\oplus{}^tY$

b) On suppose $n=p$. Que peut-on dire de X si ${}^tX=X$? Que peut-on dire de X si ${}^tX=-X$? ($-X$ au sens de 6-d)

8) Soient $I=\{1, 2, \ldots, n\}=J$. On considère deux tableaux « carrés » $X=(x_{ij})_{i\in I\ j\in I}$ et $Y=(y_{ij})_{i\in I\ j\in}$ .La <u>trace</u> de X est le nombre $\operatorname{tr}(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_{ii}$

a) Montrer que : $\operatorname{tr}(X\oplus Y)=\operatorname{tr}X+\operatorname{tr}Y$

b) Montrer que : $\operatorname{tr}({}^tX)=\operatorname{tr}(X)$

Partie IV :

Soient $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ et $J=\{1, 2, \ldots, p\}$ deux familles d'indices. On considère le tableau donnant les notes $(x_{ij})_{i\in I\ j\in J}$ de l'étudiant i à la matière j.

1) Que représente $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{i_0 j}$ i_0 *fixé* ?

2) Que représente $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij_0}$ j_0 *fixé* ?

3) Donner trois formules permettant de calculer la moyenne de toutes les notes.

4) On considère la liste $(c_j)_{j\in J}$ où chaque c_j est le coefficient de la matière j.

a) Donner une formule permettant de calculer la moyenne pondérée de l'étudiant i_0.

b) Présenter les résultats sous la forme : (notes)(coefficients)=(moyennes des étudiants)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & & & \vdots & & & x_{1p} \\ & & & \vdots & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & x_{ij} & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & & \vdots & & & \\ x_{n1} & & & \vdots & & & x_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_1 \\ \\ m_i \\ \\ m_n \end{pmatrix}$$

Travaux Dirigés N°2

Matrices : Généralités

EL METHNI M.

EXERCICE I :

1) Ecrire explicitement les matrices carrées d'ordre 4 dont le terme général a_{ij} est donné par :

a) $a_{ij} = \text{Max}\{i; j\}$ **b)** $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ (-1)^i & \text{si} \quad i = j \\ i+j & \text{si} \quad i < j \end{cases}$

2) Pour chacune des deux matrices précédentes calculer : $\sum_{i=1}^{3} a_{i2}$, $\sum_{j=2}^{3} a_{3j}$ et $\sum_{i=1}^{2} a_{i;i+2}$

EXERCICE II :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

1) Calculer : $A + 3B - 2C$ **2)** Les matrices A, B et C sont-elles linéairement indépendantes?

EXERCICE III

On considère la matrice $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ dont le terme général est donné par : $a_{ij}=n(i-1)+j$.

1) Ecrire la matrice A pour n=4 et p=5 et calculer : **a)** $\sum_{i=1}^{n} a_{i,3}$ **b)** $\prod_{i=1}^{n} a_{in}$ **c)** $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$

2) Ecrire cette matrice A pour $n=p$ (quelconque) et calculer :

a) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ **b)** $\prod_{i=1}^{n} a_{in}$ **c)** $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$

EXERCICE IV:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer (si cela est possible) les produits : $3A$, $A+B$, AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, DC, CD, $3A+5DC$, $(AD)C$ et $A(DC)$

1) Résoudre l'équation matricielle d'inconnue X : $3A+4X=5DC$

EXERCICE V:(statistique descriptive)

n étudiants sont testés avant et après un cycle de formation.

Dans toute la suite toute matrice scalaire (a) sera identifiée avec le nombre a.

Soit X (respectivement Y) le vecteur colonne des notes des n étudiants avant (respectivement après) le cycle de formation. On a : ${}^tX = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ${}^tY = (y_1, y_2, ..., y_n)$ on pose $\Lambda = (1 \;\; 1 \;\; ... \;\; 1)$.

1) Calculer : ΛX ΛY $\frac{1}{n}\Lambda X$ et $\frac{1}{n}\Lambda Y$ Que représentent ces deux dernières matrices?

b) On pose : $\bar{x} = \frac{1}{n}\Lambda X$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\Lambda Y$. Calculer $\bar{X} = \bar{x}\,{}^t\Lambda$ $\bar{Y} = \bar{y}\,{}^t\Lambda$ $\hat{X} = X - \bar{X}$ et $\hat{Y} = Y - \bar{Y}$

Que représentent ces deux dernières matrices?

c) On considère la matrice Z de format $n\times 2$ dont la première colonne est $\hat{X}$ et la deuxième $\hat{Y}$.

Former Z et ${}^tZ$. Calculer : $\frac{1}{n}\,{}^tZ\,Z$. Que représentent les quatre coefficients de cette matrice?

EXERCICE VI :(comptabilité élémentaire)

Un chocolatier fabrique trois qualités de chocolat. La fabrication du chocolat nécessite 4 matières premières : cacao, lait, sucre et matière grasse. Le tableau des coefficients techniques suivant peut être considéré comme une matrice M où chaque ligne indique la quantité d'unités nécessaire à la fabrication d'une unité de chocolat.

	cacao	lait	sucre	matière grasse
chocolat 1	7	3	5	0
chocolat 2	8	4	2	1
chocolat 3	9	1	3	5

1) Comment interpréter chaque colonne?

2) Le chocolatier reçoit une commande de 7 unités de chocolat N°1, 4 unités de chocolat N°2 et 11 unités de chocolat N°3. On peut représenter cette commande par une matrice ligne $C = (7\ \ 4\ \ 11)$.Calculer le produit $C.M$ et en donner une interprétation.

3) On connaît le prix de chaque composant intervenant dans la fabrication du chocolat, Soit P la matrice colonne des prix : $P = {}^t(3\ \ 2\ \ 4\ \ 5)$. Calculer le produit $M.P$ et en donner une interprétation.

4) Calculer $C.M.P$ de deux manières. Que représente-t-il ?

EXERCICE VII (d'après examen partiel)

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées 3×3 à coefficients réels.

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est <u>semi-magique</u> si :

(a) la somme des éléments de chaque ligne vaut s

(b) la somme des éléments de chaque colonne vaut s.

Ce qui s'écrit : (a') $\forall i = 1;2;3 \ \sum_{j=1}^{j=3} a_{ij} = s$ (b') $\forall j = 1;2;3 \ \sum_{i=1}^{i=3} a_{ij} = s$

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est <u>magique</u> si, en plus des propriétés (a) et (b) elle vérifie (c) : la somme des éléments de chacune des deux diagonales vaut s

On désigne par S le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ des matrices semi-magiques et par M le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ des matrices magiques.

1) **a)** Ecrire la condition (c) portant sur les coefficients d'une matrice magique à la manière de (a') et (b')

b) Parmi les matrices suivantes quelles sont les matrices magiques? semi-magiques?

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Montrer que S et M sont stables pour l'addition et pour la multiplication par un réel.

3) Ecrire X comme combinaison linéaire de D, F et C et comme combinaison linéaire de E,B et G. En déduire que chacune des 6 matrices B, C, D, E, F et G s'écrit comme combinaison linéaire des 5 autres

4) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice magique de M. Calculer la somme des 9 coefficients de A en fonction de s. Calculer le terme a_{22} en fonction de s.

Travaux Dirigés N°3

Matrices carrées

EL METHNI M.

EXERCICE I :

1) On considère le polynôme en x $p(x)=(x-1)(x+2)$. Combien admet-il de racines réelles?

2) Soit A une matrice carrée et soit le polynôme en A $P(A)=(A-I)(A+2I)$

a) Montrer que $P(A)=A^2+A-2I$

b) Vérifier que pour chacune des matrices suivantes on a $P(A)=0$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}-2 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad a\in\mathbf{R}$$

c) Quelle conclusion peut-on en tirer?

d) Donner l'inverse de : $A=\begin{pmatrix}-2 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $a\in\mathbf{R}$

EXERCICE II:

Soit A une matrice involutive.

1) Montrer que les deux matrices $\frac{1}{2}(I-A)$ et $\frac{1}{2}(I+A)$ sont idempotentes.

2) Montrer que $\left[\frac{1}{2}(I-A)\right]\left[\frac{1}{2}(I+A)\right]=0$

EXERCICE III

On considère les quatre matrices : $A_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $A_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1) Montrer quelles sont linéairement dépendantes. On écrira, pour cela, A_2 comme combinaison linéaire des autres.

2) Est-ce que A_1 dépend linéairement des autres ?

3) Montrer qu'une matrice nulle dépend linéairement de n'importe quel ensemble de matrices de même format.

EXERCICE IV

1) Donner deux matrices carrées A et B telles que : $AB=0$ et $BA\neq 0$.
Calculer $(A+B)(A-B)$ et A^2-B^2 et comparer.
Calculer $(A\pm B)^2$ et $A^2\pm 2AB+B^2$ et comparer.

2) Soient A et B deux matrices carrées de même ordre n
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ est que A et B commutent.

3) Soient A et B deux matrices carrées de même ordre n
Montrer qu'une condition suffisante pour que $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$ est que A et B commutent.
Cette condition est-elle nécessaire?

4) Soient A et B deux matrices carrées de même ordre n telles que $AB=BA$

Montrer que : $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k \quad n\in \mathrm{N}^*$

Donner une expression analogue pour $(A-B)^n$.

<u>*Application numérique :*</u> soit $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

a) Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

b) En remarquant que $A = 2I_3 + J$ calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE V :

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ $B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbf{R})$ et $C=AB$

1) Montrer que si une ligne d'indice i de A est nulle il en est de même de la ligne de même indice de C

2) Montrer que si une colonne d'indice j de B est nulle il en est de même de la colonne de même indice de C

3) Montrer que si une colonne d'indice j de A s'écrit comme combinaison linéaire des p-1 colonnes restantes de A alors toutes les colonnes de C s'écrivent comme combinaison linéaires des p-1 colonnes restantes de A.

EXERCICE VI :

Soit A, B et P trois matrices carrées de même ordre n et soit $k \in \mathbf{N^*}$. On suppose que P est inversible et que $B = P^{-1}AP$.

1) Montrer que $B^k = P^{-1}A^kP$ et que $A^k = PB^kP^{-1}$

2) En déduire que $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \ldots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$ si et seulement si $\alpha_k B^k + \alpha_{k-1}B^{k-1} + \ldots + \alpha_2 B^2 + \alpha_1 B + \alpha_0 I = 0$ où $\forall i = 0,1,\ldots,k$ $\alpha_i \in \mathbf{R}$

EXERCICE VII :

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est <u>triangulaire inférieure</u> (respectivement <u>triangulaire supérieure</u>) si $\forall i<j$ $a_{ij}=0$ (respectivement $\forall i>j$ $a_{ij}=0$). On dit que A est <u>triangulaire unipotente</u> si A est triangulaire et si $\forall i \quad a_{ii} = 1$.

1) a) Montrer que la somme de deux matrices triangulaires inférieures (respectivement triangulaires supérieures) de même ordre est une matrice triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

b) La somme de deux matrices triangulaires unipotentes est-elle une matrice triangulaire unipotente?

2) a) Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures (respectivement triangulaires supérieures) de même ordre est une matrice triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

b) La matrice produit de deux matrices triangulaires unipotentes est-elle triangulaire unipotente?

EXERCICE VIII :

Soient A, B, et C trois matrices carrées et D=diag(A,B,C). Montrer que D est nilpotente si et seulement si A, B, et C le sont.

EXERCICE IX:

Soit $U=(u_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n définie par : $\forall i=1,2,\ldots,n$ et $\forall j=1,2,\ldots,n$ $u_{ij}=1$ et soit $A=U-I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.

1) Calculer U^2 et en déduire A^2.

2) Déterminer deux nombres réels λ et μ tels que la matrice $P=\lambda A+\mu I_n$ soit involutive ($P^2=I_n$).

EXERCICE X :

Soit $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } a \in \mathbf{R} \right\}$

1) Montrer que la multiplication habituelle des matrices est une loi de composition interne dans E.

2) Montrer que E, muni de la multiplication habituelle des matrices, est un groupe. Est-il commutatif ?

3) Calculer $M_a^{\ n}$ pour $n\in\mathbf{N}^*$.

EXERCICE XI :

Une matrice carrée d'ordre 1 $A=(a)$ sera identifiée au nombre réel a.

Etant donnés trois nombres réels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2=1$. On considère les matrices :

$$U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad M=\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $U{}^tU$, ${}^tUU$, M^2 et $P=I+M^2$.

2) Vérifier que $P=U{}^tU$ et en déduire que $P^2=P$

3) Montrer que $PM=MP=0$, en déduire que pour $n\in\mathbf{N}^*$ $(-1)^nM^{2n}$ ne dépend pas de n. (on peut examiner $(P-M^2)^n$.

PROBLEME :

Soit $E=\left\{A_\lambda=\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -1/\lambda & -1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ tq } \lambda\in\mathbf{R}^*\right\}$ et A_λ et A_μ deux éléments de E.

1) **a)** Montrer que A_λ et A_μ commutent si et seulement si $\lambda=\mu$

b) Montrer que $A_\lambda A_\mu + A_\mu A_\lambda = k_{\lambda,\mu}I$ où I est la matrice idendité et $k_{\lambda,\mu}$ est un réel que l'on déterminera.

c) Montrer que $k_{\lambda,\mu}=0$ si et seulement si $\lambda=\mu$

d) Que peut-on en déduire sur A^2_λ ? **e)** Calculer $(A_\lambda + A_\mu)^2$

2) **a)** Pour tout entier $n\geq 1$, montrer que $\left(A_\lambda + A_\mu\right)^{2n}=(-1)^n\dfrac{(\lambda-\mu)^{2n}}{(\lambda\mu)^n}I$

b) Montrer que $(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2n}$ ne dépend pas de λ

3) Rappelons qu'une matrice $A=(a_{ij}(x))$, dont les coefficients dépendent d'un paramètre x , admet une limite quand x tend vers l'infini, s'il existe une matrice $L=(l_{ij})$ telle que

$\forall i\ \ \forall j\ \ a_{ij}(x)\xrightarrow[x\to\infty]{} l_{ij}$

a) Montrer que la matrice $B=\sum_{p=1}^{p=n}\left(A_\lambda + A_{2\lambda}\right)^{2p}$ admet, quand n tend vers l'infini, une limite que l'on calculera.

b) Exprimer simplement la matrice $C=\sum_{p=1}^{p=n}\left(A_p + A_{p+1}\right)^2$

c) Montrer que la matrice C admet, quand n tend vers l'infini, une limite que l'on calculera.

4) On décompose $A_\lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -1/\lambda & 0 \end{pmatrix}=J+K$

a) Montrer que $J^2=-K^2=I$

b) En déduire que $JK+KJ=0$

5) Soit $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & -1 & -1/\lambda & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 \\ -1/\mu & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ En utilisant une partition adéquate :

a) Calculer D^2 **b)** En déduire D^n pour l'entier $n\geq 2$

c) On suppose n pair, montrer que D^n est inversible si et seulement si $\lambda\neq\mu$

d) Etudier l'inversibilité de D^n pour n impair.

Opérations élémentaires, Matrices élémentaires

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ On considère les trois opérations élémentaires $L_2(4)$, $L_{32}(5)$ et L_{21} et soit E_1, E_2 et E_3 les matrices élémentaires correspondantes.

1) Donner E_1, E_2 et E_3

2) Calculer et comparer :

a) $L_2(4)(A)$ et E_1A **b)** $L_{32}(5)(A)$ et E_2A **c)** $L_{21}(A)$ et E_3A

d) $L_2(4)L_{32}(5)(A)$ et E_1E_2A **e)** $L_{21}L_2(4)L_{32}(5)(A)$ et $E_3E_1E_2A$

EXERCICE II :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1) **a)** Trouver une matrice élémentaire E_1 telle que $B = E_1A$. Calculer E_1^{-1}

b) Trouver une matrice élémentaire E_2 telle que $C = E_2B$. Calculer E_2^{-1}

c) En déduire une matrice P inversible $C = PA$. Calculer P^{-1}

2) Exprimer les lignes de C comme combinaisons linéaires des lignes de A

3) Vérifier que $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A. En déduire l'inverse de B et de C.

EXERCICE III :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice diagonale d'ordre n.

1) Montrer que si $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ alors A est inversible.

2) Donner, dans ce cas, son inverse A^{-1}

3) Ecrire A^{-1} comme produit de matrices élémentaires.

EXERCICE IV :

Soient $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ et $D=\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

1) **a)** Ecrire D comme produit de matrices élémentaires.

b) En déduire le terme général de DA.

2) <u>Application numérique</u> : calculer DA où n=50 et p=100 et $\forall i=1, .., 50$ $d_i=i$ et $\forall i=1, .., 50$ $\forall j=1, .., 100$ $a_{ij}=i+j-1$

PROBLEME : (Etude des p-matrices)

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n est la matrice identité d'ordre n, $\mathbf{R}_c^{\,n}$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels. On note l_{ij} l'opération élémentaire de lignes qui échange (permute) la ligne i et la ligne j d'une matrice. (i n'est pas nécessairement distinct de j). On note E_{ij} la matrice élémentaire correspondant à l_{ij}. ($E_{ij}=l_{ij}(I_n)$). (Rappelons que $l_{ij}(A)=E_{ij}A$).

On considère les matrices :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_c^4$$

On appelle <u>t-matrice</u> toute matrice obtenue à partir de I_n par application d'une <u>seule</u> opération élémentaire de lignes du type l_{ij}.

On appelle <u>p-matrice</u> toute matrice obtenue à partir de I_n par application (composition) d'un <u>nombre fini</u> d'opérations élémentaires de lignes du type l_{ij}.

On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des p-matrices carrées d'ordre n.

1) Donner $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Dresser la table de Pythagore de $\mathcal{P}_2$ pour la multiplication habituelle des matrices. Quelle est la structure de $\mathcal{P}_2$ pour cette multiplication ?

2) **a)** Donner la suite d'opérations élémentaires de lignes transformant I_4 en J, I_4 en K et I_4 en L. Exprimer J comme produit d'un nombre fini de t-matrices.

b) Calculer JX, appliquer à X la suite d'opérations élémentaires de lignes transformant I_4 en J. Que peut-on en conclure ?

c) JK et KJ sont-elles des p-matrices ?

d) Calculer JL et LJ. Que conclure ? Comparer ${}^tJ$ et L.

3) Dans $\mathcal{P}_n$ on considère la multiplication habituelle des matrices.

a) Montrer que le produit de deux p-matrices est une p-matrice

b) Montrer qu'une p-matrice est inversible.

c) Montrer que $\mathcal{P}_n$, muni de la multiplication habituelle des matrices, est un groupe. Est-il commutatif ?

4) **a)** Soit T une t-matrice. Montrer que ${}^tT=T$.

b) Montrer que la transposée d'une p-matrice est une p-matrice

c) Montrer que l'inverse d'une p-matrice est égale à sa transposée.

5) Soit $A\in\mathcal{P}_n$, $X={}^t(x_1, x_2, \dots , x_n)\in\mathbf{R}_c{}^n$ et $Y=AX={}^t(y_1, y_2, \dots , y_n)\in\mathbf{R}_c{}^n$.

Montrer que $\forall i\in\{1, 2, \dots,n\}$ $\exists j\in\{1, 2, \dots,n\}$ unique tel que $y_i=x_j$.

6) Soit $A\in\mathcal{P}_n$, $X={}^t(x_1, x_2, \dots , x_n)\in\mathbf{R}_c{}^n$ et $Y=AX={}^t(y_1, y_2, \dots , y_n)\in\mathbf{R}_c{}^n$ et $E=\{x_1, x_2, \dots , x_n\}$ l'ensemble des coefficients de X. D'après la question précédente E est aussi l'ensemble des coefficients de Y. On dit qu'un coefficient x_i de X est <u>invariant</u> par A si $y_i=x_i$. Autrement dit si x_i se retrouve à la même ligne dans Y (que dans X). On note <u>Inv(A)</u> le sous-ensemble de E des éléments invariants par A et on désigne par $\mathcal{E}_A$ son complémentaire dans E que l'on appelle <u>ensemble d'efficacité</u> de A. Une p-matrice dont l'ensemble d'efficacité est égal à E est dite <u>complète</u>.

a) Donner l'ensemble d'efficacité de J, K et de I_4.

b) Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble d'efficacité d'une t-matrice ?

c) Donner une borne inférieure et une borne supérieure de l'ensemble d'efficacité d'une p-matrice qui n'est pas une t-matrice.

d) Montrer que deux p-matrices ayant des ensembles d'efficacité disjoints commutent.

7) Soit $A\in\mathcal{P}_n$. On appelle <u>degré</u> de A le plus petit entier naturel $k>0$ tel que $A^k=I_n$.

a) Quel est le degré de I_n ? Quel est le degré d'une t-matrice ?

b) Quel est le degré de J ? Donner le sous-groupe engendré par J.

c) Soit $A\in\mathcal{P}_n$ de degré pair ($k=2r$), quel est l'inverse de A^r ?

d) Montrer qu'une p-matrice est symétrique si et seulement si son degré est 1 ou 2.

l.r.e et rang

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Reconnaître, parmi les matrices suivantes, celles qui sont ligne réduites et celles qui sont ligne réduites échelonnées et dire pourquoi les autres ne le sont pas. Trouver les matrices l.r.e de ces dernières :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE II :

Donner toutes les formes générales des matrices ligne-réduites échelonnées de format 2×3 de rang 1 et de rang 2.

EXERCICE III :

Il est connu (voir cours) que si A et B sont ligne-équivalentes alors rang(A) = rang(B).
Montrer que la réciproque est fausse.

EXERCICE IV :

1) Donner le rang des matrices A_i suivantes : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit R_i la matrice ligne-réduite échelonnée de A_i $\quad i = 1, 2, 3$

a) Calculer A_1A_3 $\quad A_2A_3$ $\quad R_1R_3$ et R_2R_3

b) Calculer rang(A_1A_3) $\quad$ rang(A_2A_3) $\quad$ rang(R_1R_3) $\quad$ et rang(R_2R_3)

Que peut-on en conclure?

EXERCICE V :

1) Trouver la matrice l.r.e R associée à $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice P telle que $R=PA$

2) Quel est le rang de A?

3) Vérifier que les lignes non nulles de R sont linéairement indépendantes

4) Vérifier que les colonnes pivots de R sont linéairement indépendantes

5) Vérifier que les colonnes non pivots de R sont des combinaisons linéaires des colonnes pivots d'indices inférieurs

6) Donner les combinaisons linéaires entre les colonnes de A.

EXERCICE VI :

Soient $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ avec $\forall i=1, .., n \ \ \forall j=1, .., p \ \ a_{ij}=i+j-1$

1) Pour $n=4$ et $p=5$

a) Donner une suite d'opérations élémentaires de lignes transformant A en une matrice ayant la même première ligne que A et dont tous les autres coefficients valent 1

b) En déduire la l.r.e de A.

2) Pour $n=50$ et $p=100$

a) Décrire une suite d'opérations élémentaires de lignes transformant A en une matrice ayant la même première ligne que A et dont tous les autres coefficients valent 1

b) En déduire la forme générale de la l.r.e de A.

3) Quel est le rang de A pour n et p quelconques ?

EXERCICE VII :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} -3+2\lambda & -2\lambda & -3 & 2\lambda \\ -2+\lambda & -\lambda & -2 & \lambda \\ 3-2\lambda & 2\lambda & 3 & -2\lambda \\ 1-\lambda & \lambda & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda\in\mathbf{R}$

1) Vérifier que $A^2 = 0$

2) Montrer que si $\lambda = 0$ alors rang(A) = 1

3) Montrer que si $\lambda \neq 0$ alors rang(A) = 2

EXERCICE VIII :

Soit $X\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ et $k\in\mathbf{N}$ $1\leq k\leq p$. On note $C_k(X)$ la sous-matrice obtenue en considérant les k premières colonnes de X.

1) Montrer que si $X \overset{l}{\sim} Y$ alors $C_k(X) \overset{l}{\sim} C_k(Y)$

2) Montrer que si Y est une matrice ligne-réduite échelonnée alors $C_k(Y)$ est aussi une matrice ligne-réduite échelonnée.

3) En déduire que si la matrice augmentée $(R\,|\,H)$ est la matrice ligne-réduite échelonnée de $(A\,|\,K)$ alors R est la matrice ligne-réduite échelonnée de A.

EXERCICE IX :

Soit A une matrice non nulle de format $n\times p$.

Montrer que rang(A)=1 si et seulement si A peut se mettre sous la forme d'un produit $A = BC$ où B et C sont deux matrices non nulles de format respectif $n\times 1$ et $1\times p$.

Systèmes linéaires

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Résoudre le système linéaire suivant et donner la solution sous forme canonique.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 7 \end{cases}$$

EXERCICE II :

Les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Si oui donner la solution sous forme canonique.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 &= 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 7 \end{cases}$$

EXERCICE III :

Trouver un nombre de trois chiffres sachant que

- La somme des chiffres est égale à 14
- En permutant le chiffre des unités avec celui des dizaines ce nombre augmente de 36
- En permutant le chiffre des unités avec celui des centaines ce nombre augmente de 297

EXERCICE IV :

Résoudre et discuter selon le paramètre k les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 3x - 4y = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x - ky + z = k \\ -x + ky + z = 1 \\ x + ky - z = 1 \end{cases}$$

EXERCICE V :

Discuter, selon les valeurs du paramètre λ et donner, s'il y a lieu, les solutions sous forme canonique du système linéaire suivant : $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + 2\lambda x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2\lambda x_3 &= \lambda \\ -x_1 - \lambda x_2 + 4x_3 &= -2 \end{cases}$

EXERCICE VI :

On considère le système linéaire $\begin{cases} x + 2y - 9z = 1 \\ -y + \lambda z = -2 \\ -x + \lambda y + z = 7 \end{cases}$ où λ est un paramètre réel.

Pour quelle(s) valeur(s) de λ ce système est-il incompatible?

EXERCICE VII :

On considère un système linéaire (ζ) : $AX=K$ où $K\neq 0$. Soient S_1 et S_2 deux solutions de (ζ).

Trouver tous les réels α et β tels que $\alpha S_1 + \beta S_2$ soit aussi solution de (ζ).

EXERCICE VIII :

Discuter, selon les valeurs des paramètres λ et μ l'existence et le nombre de solutions du système linéaire suivant (Ne pas donner la forme explicite de la (les) solution(s) quand elle(s) existe(nt)) :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = & \lambda^2 \\ (\lambda-1)x_2 + (1-\lambda)\lambda x_3 & = & \lambda - \lambda^2 \\ (\lambda+2)x_1 + (\lambda+2)\lambda x_2 + (\lambda+2)x_3 & = & \mu + \lambda + \lambda^2 \end{cases}$$

EXERCICE IX :

On considère le système linéaire : $\begin{cases} x+\lambda y & = & \alpha \\ \lambda x + y & = & \beta \\ x+\lambda y + z + \lambda t & = & \gamma \\ x - y + \lambda z + t & = & \delta \end{cases}$ où $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^5$.

1) Montrer que la condition nécessaire pour que ce système admette une infinité de solutions est que $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$.

2) Donner la solution générale sous forme canonique dans le cas où $\lambda=1$

EXERCICE X :

On considère le système linéaire (ξ) : $AX=K$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) Ce système est-il incompatible?

2) Calculer $B={}^tA.A$ et B^{-1}

3) Résoudre le système linéaire ${}^tA.AX = {}^tA.K$

EXERCICE XI :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1) Montrer que si $ad\text{-}bc=0$ alors les lignes de A sont linéairement dépendantes.

2) Montrer que A est inversible si et seulement si $ad\text{-}bc \neq 0$

3) Si A est inversible donner l'expression de son inverse A^{-1}

4) Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

5) En déduire l'unique (pourquoi ?) solution du système linéaire : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}$

EXERCICE XII :

1) Montrer que les matrices lignes de $A_1=(5\ \ 8\ \ 1)$, $A_2=(0\ \ 2\ \ 1)$ et $A_3=(4\ \ 3\ \ -1)$ sont linéairement indépendantes. En déduire que $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2) Résoudre les systèmes linéaires : $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 & = & a \\ 2x_2 + x_3 & = & b \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 & = & c \end{cases}$

Déterminants

EL METHNI M.

EXERCICE I :

1) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$

2) Sans le calculer montrer que le déterminant suivant est nul : $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

EXERCICE II :

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}$

EXERCICE III :

Vérifier que les entiers : 169, 1300, 1313 et 5265 sont divisibles par 13. En déduire, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 13. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

EXERCICE IV :

Développer sous forme de produit de facteurs le déterminant suivant. En déduire les solutions de l'équation $\Delta(x)$=0. $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+7 \end{vmatrix}$

EXERCICE V :

Résoudre l'équation en x suivante : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$

EXERCICE VI : (D'après examen partiel)

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$

1) Vérifier que : $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \ \ a_{ij} \in \{-1,1\}$

2) Quelles sont les valeurs possibles de $\prod_{i,j} a_{ij} = a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33}$?

3) **a)** Montrer que $-6 \leq \det(A) \leq 6$

b) Montrer que $\det(A) \neq 6$ et que $\det(A) \neq 5$

4) Donner un exemple d'une telle matrice A telle que $\det(A)=4$.

EXERCICE IV : (D'après examen partiel)

Sous quelles conditions, portant sur les paramètres réels a et b, le déterminant suivant est-il nul?

$$\begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix}$$

EXERCICE VII :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall i\ \ \forall j\ a_{ij}\in\mathbf{Z}$.

Montrer l'équivalence suivante :

A^{-1} existe et tous ses coefficients sont dans $\mathbf{Z}$ si et seulement si $|\det(A)|=1$

EXERCICE VIII : (D'après examen partiel)

Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} a+\lambda & a & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a+\lambda & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a+\lambda & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & a+\lambda & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a+\lambda \end{vmatrix}$

EXERCICE IX :

Résoudre en utilisant la technique des déterminants et selon les valeurs du paramètre réel λ, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+9z & = & 1 \\ -y+\lambda z & = & -2 \\ -x+\lambda y+z & = & 7 \end{cases}$$

EXERCICE X :

Soit a et b deux réels et $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\det(A)$. Quelles sont les conditions sur a et b pour que A soit inversible?

2) On suppose ces conditions réalisées. Calculer l'inverse de A en :

- **a)** utilisant l'adjointe.
- **b)** résolvant un système linéaire $AX=K$.
- **c)** utilisant des opérations élémentaires de lignes.

EXERCICE XI :

Soi D_n le déterminant d'ordre n : $|a_{ij}|$ tel que $a_{ii}=0$ et $\forall i\neq j\ \ a_{ij}=1$. On désigne par Δ_n le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant a_{11} par 1 dans D_n.

1) Exprimer D_n et Δ_n en fonction de D_{n-1} et Δ_{n-1}

2) En déduire le calcul de D_n et Δ_n en fonction de n.

EXERCICE XII :

Soit $A_n=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer que $\mathbf{det}(A^{\mathbf{t}}A)\geq 0$

2) Montrer que si A est triangulaire supérieure ou inférieure ou en particulier diagonale on a

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3) Montrer que si A est antisymétrique d'ordre impair alors $\mathbf{det}(A)=0$.

Table des matières