Travaux Dirigés N°8

Espaces et sous-espaces vectoriels

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $\mathbf{R}^2 = \{u = (x,y) \text{ tq } x \in \mathbf{R} \text{ et } y \in \mathbf{R}\}$ muni de l'addition habituelle des couples. On y définit la multiplication par un scalaire de la manière suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad \forall u = (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \lambda u = \lambda(x,y) = (\lambda x, 0)$$

Quelle est l'axiome de la structure d'espace vectoriel qui n'est pas vérifié? Que peut-on en conclure?

EXERCICE II :

Soit x et a deux vecteurs d'un **R**-ev E. On considère l'équation d'inconnue x et de paramètre a :
$4(x - 2a) - 0,5(2x + a) = 1,5(x + a)$

1) Résoudre cette équation en détaillant toutes les étapes et citant à chaque étape l'axiome (de la définition d'un espace vectoriel) utilisé.

2) En comparant aux calculs usuels dans **R** ou dans **C**, quelle est l'opération « interdite » ? (non définie).

EXERCICE III :

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ tq } (x,y) \in \mathrm{R}^2 \right\}$ Montrer que E est un **R**-espace vectoriel

EXERCICE IV :

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ et les sous-ensembles suivants :

a) $E = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,0,0) \quad x \in \mathbf{R} \right\}$ **b)** $F = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,1,1) \quad x \in \mathbf{R} \right\}$

c) $G = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,y,z) \text{ avec } x + z = y \right\}$ **d)** $H = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,y,z) \text{ avec } x = 2y \right\}$

1) Donner quelques éléments de chacun de ses sous-ensembles

2) Lesquels de ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$?

EXERCICE V :

1) On considère les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$

$A=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x>y\}$ $B=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x-y=1\}$

$C=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x^2=y\}$ $D=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x-y=0\}$

Représenter graphiquement ces sous-ensembles et indiquer les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

2) Donner un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ stable pour l'addition et pour l'opposé et qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE VI :

Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. On considère les sous-ensembles suivants

a) $E = \left\{ p(x) \in \mathbf{R}_3[\mathrm{X}] \text{ tq } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ avec } a_0 = 1 \right\}$

b) $E = \left\{ p(x) \in \mathbf{R}_3[\mathrm{X}] \text{ tq } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ avec } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$

c) $E = \left\{ p(x) \in \mathbf{R}_3[\mathrm{X}] \text{ tq } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ avec } (a_0;a_1;a_2;a_3) \in \mathbf{Z}^4 \right\}$

1) Donner quelques éléments de chacun de ses sous-ensembles

2) Lesquels de ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_3[X]$?

EXERCICE VII : (D'après examen)

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M_{x,y} = xI + yJ \text{ tq } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$

Montrer que E est un **R**-ev pour les opérations habituelles.

EXERCICE VIII :

1) Le vecteur u=(3,10,-7,5) appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les deux vecteurs : x=(1,4,-5,2) et y = (1,2,3,1)?

2) Déterminer λ et μ de façon que le vecteur (λ,μ,-25,-1) appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par x = (1,4,-5,2) et y = (1,2,3,1)

EXERCICE IX :

1) Donner deux sous-espaces vectoriels A et B d'un espace vectoriel E dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que l'union de deux sous-espaces vectoriels A et B d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Travaux Dirigés N°9

Familles libres, familles génératrices

EL METHNI M.

EXERCICE I :

1) Montrer que les vecteurs $u = (2\ 2\ 1)$, $v = (1\ 3\ 1)$ et $w = (-2\ 1\ 3)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^3$

2) Montrer que les vecteurs $u = (1\ 0\ 3)$, $v = (0\ 1\ 2)$ et $w = (3\ -1\ 7)$ ne sont pas linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^3$ et donner la relation linéaire qui les lie.

EXERCICE II :

1) Montrer que les deux matrices colonnes $A={}^t(1\ \ 2)$ et $B={}^t(1\ \ -2)$ engendrent $\mathbf{R}^2{}_c$. A et B sont-elles linéairement indépendantes ?

2) Montrer que les trois matrices colonnes $A={}^t(1\ \ 2)$, $B={}^t(1\ \ -2)$ et $C={}^t(3\ \ 2)$ engendrent $\mathbf{R}^2{}_c$. A, B et C sont-elles linéairement indépendantes ?

3) Montrer que les trois matrices colonnes $A={}^t(3\ \ 1\ \ 5)$, $B={}^t(2\ \ 1\ \ 4)$ et $C={}^t(-1\ \ 2\ \ 3)$ engendrent $\mathbf{R}^3{}_c$.

EXERCICE III :

1) Le vecteur $u=(3,10,-7,5)$ appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les deux vecteurs : $x=(1,4,-5,2)$ et $y = (1,2,3,1)$?

2) Déterminer λ et μ de façon que le vecteur $(\lambda,\mu,-25,-1)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par $x = (1,4,-5,2)$ et $y = (1,2,3,1)$

EXERCICE IV :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$ K appartient-il à l'espace des colonnes de A ?

EXERCICE V :

On considère l'espace vectoriel $E=\mathbf{R}^3$ et F le sous-espace engendré par $\{(1,0,0)\ ;\ (0,1,0)\}$ et G le sous-espace engendré par $\{(0,1,1)\ ;\ (1,0,1)\}$. Donner $F\cap G$

EXERCICE VI :

Soit $\mathbf{R}_2[x]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. On considère les polynômes $\{e_1;\ e_2;\ e_3\}$ définis par: $e_1(x)=2+x+4x^2$ $\quad e_2(x)=1-x+3x^2$ $\quad e_3(x)= 3+2x+5x^2$

Ecrire les polynômes suivants comme combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3

a) $p(x)=0$ **b)** $q(x)=-2-2x^2$ **c)** $r(x)=11+5x+19x^2$

EXERCICE VII :

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n

1) Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$

2) Décomposer quelques matrices carrées sous cette forme.

3) Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques.

a) Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

EXERCICE VIII :

Soit $S=\{u_1;\ u_2;...;\ u_n\}$ une famille d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. On considère les trois transformations suivantes :

a) échange de l'ordre des vecteurs

b) multiplication de l'un d'eux par un réel non nul

c) remplacement de l'un des vecteurs par lui-même augmenté d'un multiple d'un autre vecteur.

1) On suppose S libre.

a) Montrer que cette famille reste libre lorsqu'elle subit un nombre fini de ces transformations.

b) On considère les vecteurs : $v_1 = u_1$; $v_2 = u_1 + u_2$; $v_3 = u_1 + u_2 + u_3$;...; $v_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

Montrer que la famille $\{v_1; v_2;...; v_n\}$ une famille libre

2) On suppose S quelconque. Montrer que le sous-espace engendré par cette famille n'est pas modifié lorsqu'elle subit un nombre fini de ces transformations.

EXERCICE IX :

Soit $\mathbf{R}_n[x]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1) On considère $n = 2$ et soit $p(x)$ un élément de $\mathbf{R}_2[x]$ de degré 2. Montrer que $p(x)$ et ses deux polynômes dérivées $p'(x)$ et $p''(x)$ sont linéairement indépendants

2) On considère n quelconque et soit $p(x)$ un élément de $\mathbf{R}_n[x]$ de degré n. Montrer que $p(x)$ et ses n polynômes dérivées $p'(x)$, $p''(x)$ ... et $p^{(n)}(x)$ sont linéairement indépendants.

Travaux Dirigés N°10

Bases et dimension

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Dire, sans calcul, pourquoi les familles suivantes ne sont pas des bases de $\mathbf{R}^2$

a) $((1\ \ 1) ; (3\ \ 3))$ **b)** $((1\ \ 1) ; (0\ \ 0))$ **c)** $((1\ \ 1) ; (1\ \ 0) ; (0\ \ 1))$

EXERCICE II : (D'après examen partiel)

Soit $F=\{x=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\in\mathbf{R}^3$ tq $x_1+x_2+x_3=0\}$

$G=\{x=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\in\mathbf{R}^3$ tq $x_1-2x_2+x_3=0$ et $-x_1+3x_2-2x_3=0\}$

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels (pour étudiants intéressés supplémentaires)de $\mathbf{R}^3$ et donner une base pour chacun.

2) (Pour étudiants intéressés) Expliciter la décomposition d'un vecteur quelconque $x\in\mathbf{R}^3$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

EXERCICE III :

Soit $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles.

1) Montrer que les familles suivantes sont linéairement dépendantes :

$(\cos 2x, 1, \cos^2 x)$; $(2e^x, 3e^{-x}, \mathrm{sh}x)$

2) Montrer que les familles suivantes sont linéairement indépendantes :

(e^x, e^{2x}, e^{3x}) ; $(\ln x, x\ln x, x^2\ln x)$

EXERCICE IV :

Pour quelles valeurs de α la famille : $u_1=(\alpha,1,1)$, $u_2=(1,\alpha,1)$ et $u_3=(1,1,\alpha)$ est une base de R^3 ?

EXERCICE V : (D'après examen partiel)

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et soit E le sous-ensemble des matrices de la forme $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ? Décrire une base de E.

2) Montrer que si $A\in E$ et $B\in E$ alors $AB=BA\in E$.

EXERCICE VI :

Soit $E=\left\{\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ tq } (x,y)\in\mathbf{R}^2\right\}$ Rappelons que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

Soit $U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Montrer que la famille $\{U, V\}$ est une base de E.

EXERCICE VII :

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n

1) Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. $A=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)$

2) Décomposer quelques matrices carrées sous cette forme.

3) Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques.

a) Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}\oplus\mathcal{A}$

4) Quelle est la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$?

5) En déduire la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

PROBLEME : (D'après examen partiel)

Soit $\mathbf{R}_2[x]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. Soit $\mathcal{B}=(e_0; e_1; e_2)$ sa base canonique.

$\forall i=0, 1, 2 \quad \forall x\in\mathbf{R} \quad e_i(x)=x^i$

1) On considère les polynômes f_i définis par : $f_0 = e_1 - e_0$ $\;f_1 = e_2 - e_0$ $\qquad f_2 = e_0 + e_1 + e_2$

a) Montrer que $\mathcal{B}'=(f_0; f_1; f_2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[x]$.

b) Exprimer les e_i en fonction des f_i.

2) Soit $F=\{p = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2\in\mathbf{R}_2[x]$ tel que $a_0 + a_1 + a_2=0\}$

a) Donner deux exemples de polynômes de F.

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[x]$.

c) Ecrire tout polynôme de F en fonction de f_0 et f_1.

d) Donner une base et la dimension de F.

3) Soit $G=\{p\in\mathbf{R}_2[x]$ tel que $\exists a\in\mathbf{R}$ tel que $p = a(e_0 + e_1 + e_2)\}$

a) Donner deux exemples de polynômes de G.

b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[x]$.

c) Ecrire tout polynôme de G en fonction de f_2.

d) Donner une base et la dimension de G.

4) (Pour étudiants intéressés)

a) Déterminer $F\cap G$

b) Montrer que F et G sont supplémentaires.

Changement et construction de bases

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Donner une base du noyau de A et une base de l'espace colonne de A. Retrouver la relation qui existe entre les dimensions de ces deux sous-espaces et le nombre de colonnes de A.

EXERCICE II :

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni de deux bases : la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ avec $f_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$ et $f_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$

1) Représenter dans le plan ces deux bases et décrire comment on passe de l'une à l'autre

2) Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. En déduire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

3) Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les représentants de e_1 et e_2 dans $\mathbf{R}_c^2$. Calculer $P.E_1$ et $P.E_2$.

Quelle relation avec f_1 et f_2?

4) Soit $x=x_1e_1+x_2e_2=y_1f_1+y_2f_2$. Exprimer x_1 et x_2 en fonction de y_1 et y_2 et réciproquement.

<u>*Application numérique*</u> : Donner les coordonnées de $x=e_1+e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Donner les coordonnées de $y=f_1+f_2$ dans la base $\mathcal{B}$.

EXERCICE III :

Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions du système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

EXERCICE IV :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $PA = R$ est une matrice ligne réduite échelonnée et $Q = P^{-1}$.

2) On considère la famille $S=\{(1\ 1\ 1\ 1); (1\ 2\ 1\ 1); (1\ 3\ 1\ 1); (1\ 1\ 2\ 1); (3\ 2\ 3\ 3)\}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^4$

a) Montrer que S est une famille liée et donner la relation linéaire entre les colonnes de A. Quel est le rang de S ?

b) Extraire de S une famille libre et compléter la en une base de $\mathbf{R}^4$

3) Montrer que les lignes non nulles de R constituent une base de l'espace vectoriel engendré par les lignes de A. Généraliser.

4) Déduire la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes de A et comparer avec la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A. Généraliser

EXERCICE V :

Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 muni de sa base canonique $B=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

On considère la famille de quatre polynômes p_1, p_2, p_3 et p_4 définis par :

$p_1(x)=1$ $p_2(x)=1+x+x^2$ $p_3(x)=2+x+x^2$ $p_4(x)=x^3$

1) Extraire de cette famille une famille libre
2) Compléter cette famille en une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

EXERCICE VI :

On rappelle que $\mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et que pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. La base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est $\mathcal{B}=(e_0, e_1, e_2,\dots, e_n)$ où $\forall x\in\mathbf{R}\quad e_i(x)=x^i \quad i=0, ..., n$.

A tout polynôme $p(x)$ on associe le polynôme $q(x)=x^2p'(x)-3xp(x)$ où $p'(x)$ est la dérivée de $p(x)$.

1) Calculer les composantes dans la base canonique de $q(x)$ en fonction de celles de p dans cette même base.

2) Soit $\mathcal{B}'=(f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $\forall x\in\mathbf{R}\quad f_0(x)=x$; $f_1(x)=x+1$; $f_2(x)=x(x-1)$; $f_3(x)= x(x-1)(x+1)$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$

b) Exprimer les f_i en fonction des e_i et les e_i en fonction des f_i

c) Donner les composantes du polynôme $p(x)=1+x+x^2+x^3$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les composantes du polynôme $q(x)$ associé au polynôme $p(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE VII :

Soit $\mathbf{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_0\ e_1\ e_2\ e_3)$ avec $e_i(x) = x^i$ $i = 0, 1, 2, 3$. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (f_0\ f_1\ f_2\ f_3)$ avec :

$f_0(x)=1$ $\quad f_1(x) = x$ $\quad f_2(x)=-1+2x^2$ et $f_3(x)=-3x+4x^3$ (les 4 premiers polynômes de Chebyshev)

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[x]$.

2) Soit $p\in\mathbf{R}_3[x]$ avec $p(x)=1+3x+2x^2$, donner les coordonnées de p dans la base $\mathcal{B}'$.

Applications linéaires

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Dans toute la suite E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ et T une application de E dans F.
Dire pourquoi les applications T suivantes ne sont pas des applications linéaires :

a) $E=F=\mathbf{R}^2$ $\quad T((x,y))=(x^2,y)$ **b)** $E=\mathbf{R}_c^2$ $F=\mathbf{R}$ $\quad T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=x+y+1$

c) $E=F=\mathbf{R}$ $\quad T(x)=e^x$ **d)** $E=F=\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ $\quad T(f)=|f|$

e) $E=F=\mathbf{R}_2[x]$ $\quad T(p)(x)=p''(x)p(x)$

EXERCICE II :

Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Dire lesquelles parmi les applications suivantes, sont des applications linéaires de E dans F.

a) $E = F = \mathbf{R}^2$ $\quad T(x,y) = (x,y+1)$
b) $E = \mathbf{R}^2$, $F = \mathbf{R}^3$ $\quad T(x,y) = (x,y+x,2x)$
c) $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}$ $\quad T(x,y,z) = x+yz$
d) $E = F = \mathbf{R}_2[\mathrm{x}]$ $\quad T(p)(x) = p(x+1)$
e) $E = F = \mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ $\quad T(f)(x) = xf(x)$
f) $E = \mathbf{R}^4$, $F = \mathbf{R}^3$ $\quad T(x,y,z,t) = (y+x,y-z,z+x)$

EXERCICE III :

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\{e_1, e_2\}$

1) On considère l'endomorphisme T de E défini par : $T(e_1)=2e_1+4e_2$ $\quad T(e_2)=-e_1+2e_2$

a) Calculer $T(3,4)=T(3\,e_1+4e_2)$ $\quad T(1,-1)=T(e_1-e_2)$

b) Soit $u=(x,y)=xe_1+ye_2\in E$. Donner l'expression générale de T $(T(x,y)=?)$

2) Soit T l'endomorphisme de E défini par son expression générale $T(x,y)=T(xe_1+ye_2)=(2x-3y,x)$

Calculer $T(e_1)$ et $T(e_2)$

EXERCICE IV :

On considère l'application définie par : $$\begin{aligned} T:\mathbf{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ p &\longrightarrow T(p)=p(0) \end{aligned}$$

a) Montrer que T est une forme linéaire

b) Quel est son noyau? son image? En déduire la dimension du noyau.

EXERCICE V:

Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels et T une application linéaire de E dans F. Montrer que :

a) L'image par T d'un sous-espace vectoriel de E est sous-espace vectoriel de F

b) L'image réciproque par T d'un sous-espace vectoriel de F est sous-espace vectoriel de E

EXERCICE VI :

On considère l'espace vectoriel réel $E=\mathbf{R}^2$

1) Soit T l'application de E dans E définie par : $$\begin{aligned} T:\quad E &\longrightarrow E \\ u=(x,y) &\longrightarrow T(u)=(x,0) \end{aligned}$$

a) Calculer $T(1,1)$. Montrer que T est une application linéaire. Quelle appellation suggériez-vous pour T ?

2) Soit $\lambda\in\mathbf{R}$ et U l'application de E dans E définie par : $$\begin{aligned} U:\quad E &\longrightarrow E \\ u=(x,y) &\longrightarrow U(u)=(\lambda x,\lambda y) \end{aligned}$$

a) Calculer $U(1,1)$. Montrer que U est une application linéaire. Quelle appellation suggériez-vous pour U ?

EXERCICE VII : (D'après examen)

Soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n muni de sa base canonique $\mathcal{B}=\{e_i\}$ où $\forall x\in\mathbf{R}\quad e_i(x)=x^i \quad i=0, ..., n$. Soit φ l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$ définie par : $\varphi : p \to q=\varphi(p)$ où $\forall x\in\mathbf{R}\ \ q(x)=p(x)-xp'(x)$ où $p'(x)$ est la dérivée de $p(x)$.

1) Montrer que φ est une application linéaire.

2) Exprimer $\varphi^2(p)=\varphi o\varphi(p)$ en fonction de p et de ses dérivées.

EXERCICE VIII:

Soient E et F deux **R**-espaces vectoriels et T une application linéaire de E dans F.

1) Soit $\{u_1, u_2,..., u_n\}$ une famille libre de E. Montrer que si T est injective alors $\{T(u_1),T(u_2),...,T(u_n)\}$ est une famille libre de F.

2) Soit $\{e_1, e_2,..., e_n\}$ une base de E. Montrer que :

a) T est injective si et seulement si $\{T(e_1),T(e_2),...,T(e_n)\}$ est une famille libre de F.

b) T est surjective si et seulement si $\{T(e_1),T(e_2),...,T(e_n)\}$ est une famille génératrice de F.

3) En déduire le théorème (dit théorème de l'alternative)

Soient E et F deux **R**-espaces vectoriels de même dimension finie et T une application linéaire de E dans F. Alors : T injective $\Leftrightarrow$ T surjective $\Leftrightarrow$ T bijective

EXERCICE IX :

Soit T l'application de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par : $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1-x_3, x_2-x_4)$

1) Montrer que T est une application linéaire

2) Quelle est la dimension de Ker(T)? Proposer une base pour Ker(T).

EXERCICE X :

Soit T un endomorphisme de E et $T^2 = T \text{ o } T$

1) Montrer que $\text{Ker}(T)\subset\text{Ker}(T^2)$ et que $\text{Im}(T^2)\subset\text{Im}(T)$

2) Soit $E=\mathbf{R}^3$ et T l'endomorphisme défini par : $T(x_1, x_2, x_3)=(0, x_1, x_1+x_2)$

a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces : Ker(T), Im(T), Ker(T^2) et Im(T^2)

b) Vérifier que $\dim \mathbf{R}^3=\dim\text{Ker}(T^2)+\dim\text{Im}(T^2)$

c) Peut-on dire pour autant que $\mathbf{R}^3$ est somme directe de Ker(T^2) et de Im(T^2)?

EXERCICE XI:

Soient E et F deux **R**-espaces vectoriels de dimension n et m. Soit T une application linéaire de E dans F.

1) Montrer que $\text{rang}(T)\leq n$ et $\text{rang}(T)\leq m$

2) Soit U un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim T(U)\leq\dim U$.

2) Soit S une application linéaire de F dans un **R**-espace vectoriel G. Montrer que :

$\text{rang}(SoT)\leq\text{rang}(S)$ et $\text{rang}(SoT)\leq\text{rang}(T)$

EXERCICE XII :

Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un **R**-espace vectoriel E. On considère l'application :

$$p : \begin{array}{ccc} E=F+G & \to & E \\ x=y+z & \to & p(x)=y \end{array}$$

1) Montrer que p est un endomorphisme de E et que $p^2(=pop)=p$

2) Déterminer Ker(p) et Im(p). Quelle appellation suggériez-vous pour p?

EXERCICE XIII :

Soit E=F=$\mathbf{R}_c^2$ et G=$\mathbf{R}_c^3$. On considère les matrices : $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

et les applications $\begin{array}{l} R:E\longrightarrow \quad F \\ \quad u\longrightarrow R(u)=Au \end{array}$ et $\begin{array}{l} S:F\longrightarrow \quad G \\ \quad u\longrightarrow S(u)=Bu \end{array}$

1) Montrer que les applications R et S sont des applications linéaires.

2) Donner les expressions analytiques de R et S. En déduire l'expression analytique de T=SoR

3) Vérifier que $\forall u\in E \qquad T(u)=(B.A)u$

EXERCICE XIV :(D'après examen)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n>0 et u un endomorphisme de E tel que $u^2=-Id$. (Id est l'application identique et $u^2=uou$).

a) Montrer que u est inversible.

b) Soit x un vecteur non nul de E, montrer que x et $u(x)$ sont linéairement indépendants.

c) Montrer que l'existence d'un endomorphisme u de E tel que $u^2=-Id$ ne peut avoir lieu que si la dimension n de E est paire.

EXERCICE XV : (D'après examen)

Soit E un **R**-espace vectoriel. Un endomorphisme p de E est un <u>projecteur</u> si $p^2=p$.

Un endomorphisme u de E est <u>involutif</u> si $u^2=Id$. (où Id est l'identité dans E)

1) Soit u et p deux endomorphismes de E tels que $p=½(Id+u)$. Montrer que : p est un projecteur si et seulement si u est involutif.

2) On suppose que p est un projecteur et on pose $q=Id-p$. Montrer que

a) q est un projecteur.

b) Imq=Ker$p$.

c) Imp=Ker$q$.

Travaux Dirigés N°13

Représentation matricielle des applications linéaires

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1,f_2)$ une base de $\mathbf{R}^2$.

On considère les applications linéaires : $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ et $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définies par :

$T(e_1)=e_1$ $\quad$ $T(e_2)=e_1+ e_2$ $\quad$ $T(e_3)=e_1+e_2+e_3$

$U(e_1)=f_1-2f_2$ $\quad$ $U(e_2)=2f_1-f_2$ $\quad$ $U(e_3)=f_1+f_2$

1) Donner les matrices de T et U. En déduire la matrice de $S=U\text{o}T$

2) Expliciter S à partir de T et U et calculer directement sa matrice

EXERCICE II : (D'après examen)

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_c^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Soit T l'endomorphisme de $\mathbf{R}_c^3$ défini par : $T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix}$

1) Donner la matrice A de T relativement à la base $\mathcal{B}$.

2) On considère les trois vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}_c^3$ et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse P^{-1}.

3) Déduire de ce qui précède la matrice B de T relativement à la base $\mathcal{B}'$.

4) Pour $k\in\mathbf{N}^*$, calculer B^k et en déduire que $T^k= a_kT+b_k\, Id$ où a_k et b_k sont deux réels que l'on déterminera. ($T^k=T\text{o}T^{k-1}$, $T^0 = Id$ et Id est l'identité dans $\mathbf{R}_c^3$: $\forall x\in \mathbf{R}_c^3 \quad Id(x)=x$)

EXERCICE III : (D'après examen)

Soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n muni de sa base canonique $\mathcal{B}=\{e_i\}$ où $\forall x\in\mathbf{R} \quad e_i(x)=x^i \quad i=0, ..., n$. Soit φ l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$ définie par : $\varphi : p \to q=\varphi(p)$ où $\forall x\in\mathbf{R}\;\; q(x)=p(x)-xp'(x)$ où $p'(x)$ est la dérivée de $p(x)$.

1) Montrer que φ est une application linéaire.

2) Ecrire la matrice M de φ dans la base canonique.

3) Exprimer $\varphi^2(p)=\varphi\text{o}\varphi(p)$ en fonction de p et de ses dérivées.

4) Ecrire la matrice de φ^2 dans la base canonique.

EXERCICE IV : (D'après examen)

Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_0,e_1,e_2,e_3)$ $\quad$ où $\forall\, x \in \mathbf{R}\;\; e_i(x) = x^i\; i = 0,1,2,3$

Partie A

On considère l'application $T : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$ qui à chaque polynôme p de $\mathbf{R}_3[X]$ associe le polynôme $q=T(p)$ défini par :

$\forall x\in\mathbf{R} \qquad q(x)=T(p)(x)=xp'(x)-p(x) \qquad$ où p' désigne la dérivée de p.

1) Montrer que T est une application linéaire

2) Donner la matrice A de T relativement à la base canonique $\mathcal{B}$.

3) Donner une base de Im(T) et de Ker(T).

4) Soit $U=T^2=T\text{o}T$. Donner l'expression de $U(p)(x)$ et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Partie B

On considère la famille $\mathcal{B}'=(p_0,p_1,p_2,p_3)$ de vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$ définis par :

$p_0(x)=1+x+x^2+x^3$ $p_1(x)=1+x+x^2-x^3$ $p_2(x)=1+x-x^2+x^3$ $p_3(x)=1-x+x^2+x^3$

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$

2) Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et en déduire P^{-1}

3) Donner la matrice de T et celle de U dans la base $\mathcal{B}'$.

Travaux Dirigés N°14

Applications linéaires et changement de bases

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $\mathbf{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤3 muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_0\ e_1\ e_2\ e_3)$ avec $e_i(x)=x^i$ $i=0, 1, 2, 3$. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}'=(f_0\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3)$ avec :

$f_0(x)=1$ $f_1(x)=x$ $f_2(x)=-1+2x^2$ et $f_3(x)=-3x+4x^3$ (les 4 premiers polynômes de Chebyshev)

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[x]$.

2) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse est P^{-1}

3) On considère l'endomorphisme T de $\mathbf{R}_3[x]$ défini par : $\forall p\in\mathbf{R}_3[x]$ $T(p)=p'$

a) Donner la matrice représentative de T relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire la matrice représentative de T relativement à la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE II : (D'après examen)

Soit $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B}$, d'un endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$.

Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1=(1,1)\ ;\ e'_2=(2,1)\}$ une autre base de $\mathbf{R}^2$.

1) Donner la matrice de passage P ainsi que P^{-1}. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

2) Calculer B^n pour $n\in\mathbf{N}^*$ et en déduire A^n pour $n\in\mathbf{N}^*$

<u>*Application :*</u> Soient α et β deux réels non nuls et $E_{\alpha,\beta}$l'espace vectoriel (de dimension 2) des suites (u_n) numériques réelles vérifiant, pour n≥1, la relation :(*) $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$ avec $u_1=a$ et $u_0=b$

1) Vérifier qu'on peut écrire la relation (*) sous la forme :

$T_{n+1}=A.T_n$ avec $T_n=\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n-1}\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ En déduire que : $T_{n+1}=A^n.T_1$

2) Ecrire sous cette forme la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=3u_n-2u_{n-1}$ avec $u_1=1$ et $u_0=0$.

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE III :

Soit E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels munis respectivement des bases :

$\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$ et $\mathcal{B}'=\{f_1, f_2, f_3\}$ et soit T un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est : $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

1) Déterminer une nouvelle base de F pour laquelle la matrice A' associée à T est ligne réduite échelonnée.

2) En déduire la matrice de changement de base P telle que $A'=P.A$ (faire un diagramme)

EXERCICE IV : (D'après examen)

Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2-5u+6Id=0$ où $u^2=uou$; Id est l'application identique de E et 0 l'application identiquement nulle de E dans E. On considère les deux endomorphismes p et q de E définis par : $p=u-2Id$ et $q=Id-p$.

1) Montrer que p et q sont des projecteurs ($p^2=p$ et $q^2=q$)

2) Calculer poq ; qop et $p+q$

3) Soit $E=\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & 1 & 1\\ 1 & 7 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{pmatrix}$

a) Montrer que p et q, définis comme précédemment, sont des projecteurs.

b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de p et q

c) On considère les trois vecteurs $f_1=e_1+e_2+e_3$; $f_2=-e_1+e_2$ et $f_3=-e_1+e_3$. Montrer que $\mathcal{B}'=(f_1, f_2, f_3)$ est une base de E et donner la matrice B de u dans cette base $\mathcal{B}'$. Calculer B^n et en déduire A^n pour $n\in\mathbf{N}^*$.

d) Donner la matrice de p et de q dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE V : (D'après examen)

Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriels des polynômes de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ où $\forall x\in\mathbf{R}$ $e_i(x)=x^i$ $i=0, 1, 2, 3$ et soit a_0, a_1, a_2 et a_3 4 réels distincts

On considère les quatres polynômes :

$$P_0(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} \qquad P_1(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} \qquad P_3(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

1) Vérifier que $P_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et $P_i(a_j) = 1$ si $i = j$

2) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (P_0,P_1,P_2,P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$

3) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

4) En déduire que la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$ est inversible

5) Donner les composantes d'un polynôme quelconque $p(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3$ de $\mathbf{R}_3[X]$ dans la base $\mathcal{B}'$

EXERCICE VI :

Soit $\mathbf{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_0\ e_1\ e_2\ e_3)$ avec $e_i(x)=x^i$ $i=0, 1, 2, 3$. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}'=(f_0\ f_1\ f_2\ f_3)$ avec :
$f_0(x)=1$ $f_1(x)=x$ $f_2(x)=-1 + 2x^2$ et $f_3(x)=-3x + 4x^3$ (les 4 premiers polynômes de Chebyshev)

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[x]$.

2) Vérifier que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et son inverse est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

3) On considère l'endomorphisme T de $\mathbf{R}_3[x]$ défini par : $\forall p\in\mathbf{R}_3[x]$ $T(p)=p'$

a) Donner la matrice représentative de T relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire la matrice représentative de T relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Table des matières