EXERCICE I :

Dire, sans calcul, pourquoi les familles suivantes ne sont pas des bases de $\mathbf{R}^2$

a) $((1 \ 1); (3 \ 3))$ b) $((1 \ 1); (0 \ 0))$ c) $((1 \ 1); (1 \ 0); (0 \ 1))$

EXERCICE II : (D'après examen partiel)

Soit $F = \{x = (x_1 \ x_2 \ x_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$G = \{x = (x_1 \ x_2 \ x_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \text{ et } -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0\}$

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels (pour étudiants intéressés supplémentaires) de $\mathbf{R}^3$ et donner une base pour chacun.

2) (Pour étudiants intéressés) Expliciter la décomposition d'un vecteur quelconque $x \in \mathbf{R}^3$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

EXERCICE III :

Soit $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles.

1) Montrer que les familles suivantes sont linéairement dépendantes :

$(\cos 2x, 1, \cos^2 x); (2e^x, 3e^{-x}, \operatorname{sh} x)$

2) Montrer que les familles suivantes sont linéairement indépendantes :

$(e^x, e^{2x}, e^{3x}); (\ln x, x \ln x, x^2 \ln x)$

EXERCICE IV :

Pour quelles valeurs de α la famille : $u_1 = (\alpha, 1, 1)$, $u_2 = (1, \alpha, 1)$ et $u_3 = (1, 1, \alpha)$ est une base de $\mathbf{R}^3$?

EXERCICE V : (D'après examen partiel)

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et soit E le sous-

ensemble des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ? Décrire une base de E.

2) Montrer que si $A \in E$ et $B \in E$ alors $AB = BA \in E$.

EXERCICE VI :

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ tq } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$ Rappelons que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Montrer que la famille $\{U, V\}$ est une base de E.

EXERCICE VII :

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n

1) Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. $A = \frac{1}{2}(A + {}^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A)$

2) Décomposer quelques matrices carrées sous cette forme.

3) Soit S le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques.

a) Montrer que S et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = S \oplus \mathcal{A}$

4) Quelle est la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$?

5) En déduire la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

PROBLEME : (D'après examen partiel)

Soit $\mathbf{R}_2[x]$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 . Soit $\mathcal{B}=(e_0; e_1; e_2)$ sa base canonique.

$\forall i=0, 1, 2 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad e_i(x)=x^i$

1) On considère les polynômes f_i définis par : $f_0 = e_1 - e_0 \quad f_1 = e_2 - e_0 \quad f_2 = e_0 + e_1 + e_2$

a) Montrer que $\mathcal{B}'=(f_0; f_1; f_2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[x]$.

b) Exprimer les e_i en fonction des f_i .

2) Soit $F=\{p = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 \in \mathbf{R}_2[x] \text{ tel que } a_0 + a_1 + a_2=0\}$

a) Donner deux exemples de polynômes de F .

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[x]$.

c) Ecrire tout polynôme de F en fonction de f_0 et f_1 .

d) Donner une base et la dimension de F .

3) Soit $G=\{p \in \mathbf{R}_2[x] \text{ tel que } \exists a \in \mathbf{R} \text{ tel que } p = a(e_0 + e_1 + e_2)\}$

a) Donner deux exemples de polynômes de G .

b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[x]$.

c) Ecrire tout polynôme de G en fonction de f_2 .

d) Donner une base et la dimension de G .

4) (Pour étudiants intéressés)

a) Déterminer $F \cap G$

b) Montrer que F et G sont supplémentaires.