Travaux Dirigés N°7
Déterminants

EL METHNI M.

EXERCICE I :

1) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$

2) Sans le calculer montrer que le déterminant suivant est nul : $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

EXERCICE II :

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}$

EXERCICE III :

Vérifier que les entiers : 169, 1300, 1313 et 5265 sont divisibles par 13. En déduire, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 13. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

EXERCICE IV :

Développer sous forme de produit de facteurs le déterminant suivant. En déduire les solutions de l'équation $\Delta(x)=0$. $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+7 \end{vmatrix}$

EXERCICE V :

Résoudre l'équation en x suivante : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$

EXERCICE VI : (D'après examen partiel)

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$

1) Vérifier que : $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \ \ a_{ij} \in \{-1,1\}$

2) Quelles sont les valeurs possibles de $\prod_{i,j} a_{ij} = a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33}$?

3) **a)** Montrer que $-6 \leq \det(A) \leq 6$

b) Montrer que $\det(A) \neq 6$ et que $\det(A) \neq 5$

4) Donner un exemple d'une telle matrice A telle que $\det(A)=4$.

EXERCICE IV : (D'après examen partiel)

Sous quelles conditions, portant sur les paramètres réels a et b, le déterminant suivant est-il nul?

$$\begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix}$$

EXERCICE VII :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall i \ \ \forall j \ a_{ij}\in\mathbf{Z}$.

Montrer l'équivalence suivante :

A^{-1} existe et tous ses coefficients sont dans $\mathbf{Z}$ si et seulement si $|\det(A)|=1$

EXERCICE VIII : (D'après examen partiel)

Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} a+\lambda & a & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a+\lambda & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a+\lambda & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & a+\lambda & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a+\lambda \end{vmatrix}$

EXERCICE IX :

Résoudre en utilisant la technique des déterminants et selon les valeurs du paramètre réel λ, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+9z & = & 1 \\ -y+\lambda z & = & -2 \\ -x+\lambda y+z & = & 7 \end{cases}$$

EXERCICE X :

Soit a et b deux réels et $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\det(A)$. Quelles sont les conditions sur a et b pour que A soit inversible?

2) On suppose ces conditions réalisées. Calculer l'inverse de A en :

- **a)** utilisant l'adjointe.
- **b)** résolvant un système linéaire $AX=K$.
- **c)** utilisant des opérations élémentaires de lignes.

EXERCICE XI :

Soi D_n le déterminant d'ordre n : $|a_{ij}|$ tel que $a_{ii}=0$ et $\forall i\neq j \ \ a_{ij}=1$. On désigne par Δ_n le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant a_{11} par 1 dans D_n.

1) Exprimer D_n et Δ_n en fonction de D_{n-1} et Δ_{n-1}

2) En déduire le calcul de D_n et Δ_n en fonction de n.

EXERCICE XII :

Soit $A_n=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer que $\mathbf{det}(A^{\mathbf{t}}A)\geq 0$

2) Montrer que si A est triangulaire supérieure ou inférieure ou en particulier diagonale on a

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3) Montrer que si A est antisymétrique d'ordre impair alors $\mathbf{det}(A)=0$.