

EXERCICE I :

- 1) Montrer que les vecteurs $u = (2 \ 2 \ 1)$, $v = (1 \ 3 \ 1)$ et $w = (-2 \ 1 \ 3)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^3$
- 2) Montrer que les vecteurs $u = (1 \ 0 \ 3)$, $v = (0 \ 1 \ 2)$ et $w = (3 \ -1 \ 7)$ ne sont pas linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^3$ et donner la relation linéaire qui les lie.

EXERCICE II :

- 1) Montrer que les deux matrices colonnes $A = {}^t(1 \ 2)$ et $B = {}^t(1 \ -2)$ engendrent $\mathbf{R}_c^2$. A et B sont-elles linéairement indépendantes ?
- 2) Montrer que les trois matrices colonnes $A = {}^t(1 \ 2)$, $B = {}^t(1 \ -2)$ et $C = {}^t(3 \ 2)$ engendrent $\mathbf{R}_c^2$. A , B et C sont-elles linéairement indépendantes ?
- 3) Montrer que les trois matrices colonnes $A = {}^t(3 \ 1 \ 5)$, $B = {}^t(2 \ 1 \ 4)$ et $C = {}^t(-1 \ 2 \ 3)$ engendrent $\mathbf{R}_c^3$.

EXERCICE III :

- 1) Le vecteur $u = (3, 10, -7, 5)$ appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les deux vecteurs : $x = (1, 4, -5, 2)$ et $y = (1, 2, 3, 1)$?
- 2) Déterminer λ et μ de façon que le vecteur $(\lambda, \mu, -25, -1)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par $x = (1, 4, -5, 2)$ et $y = (1, 2, 3, 1)$

EXERCICE IV :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (A^1 \ A^2 \ A^3)$ et $K = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$ K appartient-il à l'espace des colonnes de A ?

EXERCICE V :

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$ et F le sous-espace engendré par $\{(1, 0, 0) ; (0, 1, 0)\}$ et G le sous-espace engendré par $\{(0, 1, 1) ; (1, 0, 1)\}$. Donner $F \cap G$

EXERCICE VI :

Soit $\mathbf{R}_2[x]$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 . On considère les polynômes $\{e_1; e_2; e_3\}$ définis par: $e_1(x) = 2 + x + 4x^2$ $e_2(x) = 1 - x + 3x^2$ $e_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$
Ecrire les polynômes suivants comme combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3

- a) $p(x) = 0$ b) $q(x) = -2 - 2x^2$ c) $r(x) = 11 + 5x + 19x^2$

EXERCICE VII :

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n

- 1) Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$
- 2) Décomposer quelques matrices carrées sous cette forme.
- 3) Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques.
 - a) Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
 - b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

EXERCICE VIII :

Soit $S = \{u_1; u_2; \dots; u_n\}$ une famille d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E . On considère les trois transformations suivantes :

- a) échange de l'ordre des vecteurs

b) multiplication de l'un d'eux par un réel non nul

c) remplacement de l'un des vecteurs par lui-même augmenté d'un multiple d'un autre vecteur.

1) On suppose S libre.

a) Montrer que cette famille reste libre lorsqu'elle subit un nombre fini de ces transformations.

b) On considère les vecteurs : $v_1 = u_1$; $v_2 = u_1 + u_2$; $v_3 = u_1 + u_2 + u_3$; ... ; $v_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Montrer que la famille $\{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ est une famille libre

2) On suppose S quelconque. Montrer que le sous-espace engendré par cette famille n'est pas modifié lorsqu'elle subit un nombre fini de ces transformations.

EXERCICE IX :

Soit $\mathbf{R}_n[x]$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1) On considère $n = 2$ et soit $p(x)$ un élément de $\mathbf{R}_2[x]$ de degré 2. Montrer que $p(x)$ et ses deux polynômes dérivées $p'(x)$ et $p''(x)$ sont linéairement indépendants

2) On considère n quelconque et soit $p(x)$ un élément de $\mathbf{R}_n[x]$ de degré n . Montrer que $p(x)$ et ses n polynômes dérivées $p'(x)$, $p''(x)$... et $p^{(n)}(x)$ sont linéairement indépendants.