Corrigé de l'examen d'analyse N°1 (Mai 2005)

El Methni M

Exercice I :

1) $\dfrac{2t}{(1+t)(1+t^2)} = \dfrac{-1}{1+t} + \dfrac{1+t}{1+t^2}$

2) $t = \tan x/2 \quad dx = \dfrac{2t}{1+t^2}dt \quad x = 0 \Rightarrow t = 0 \quad x = \pi/2 \Rightarrow t = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx = \int_0^1 \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)}dt = \int_0^1 \left(\frac{-1}{1+t} + \frac{1+t}{1+t^2}\right)dt$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \pi/4 - \frac{1}{2}\ln 2$$

Exercice II :

(E) équation linéaire du premier ordre. L'équation homogène (E_h) est $y' = \dfrac{4x}{x^2+1}y = a(x)y$.

En utilisant un calcul direct ou en appliquant le théorème on a :

$A(x) = \int a(x)dx = \int \dfrac{4x}{1+x^2}dx = 2\ln(1+x^2) + C$ La solution de l'équation homogène (E_h):

est $y = Ke^{\ln(x^2+1)^2} = K(1+x^2)^2$. La solution générale de (E) : $y'=a(x)y+b(x)$ s'obtient en y ajoutant une solution particulière (par la méthode de la variation de la constante ou en appliquant le théorème) :

$l(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx = \int (1+x^2)^3 e^x \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int (1+x^2)e^x dx$. Une intégration par parties

donne : $l(x) = \int (1+x^2)e^x dx = (x^2-2x+3)e^x + C$

La solution générale de (E) est : $y(x) = (x^2+1)^2\left(K + (x^2-2x+3)e^x\right)$

Exercice III :

1) $t=1-x \quad dt=-dx \quad x=0 \Leftrightarrow t=1$ et $x=1 \Leftrightarrow t=0$

$$I_{(a,b)} = \int_0^1 (1-x)^a x^b dx = \int_1^0 t^a(1-t)^b(-dt) = \int_0^1 (1-t)^b t^a dt = I_{(b,a)}$$

2) $a = 0 \quad I_{(0,b)} = \int_0^1 x^b dx = \left[\dfrac{x^{b+1}}{b+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{b+1} \qquad I_{(a,0)} = I_{(0,a)} = \dfrac{1}{a+1}$

3) $b \geq 1 \quad I_{(a,b)} = \int_0^1 (1-x)^a x^b dx$ Intégration par parties :

$u = x^b \; du = bx^{b-1}dx \quad dv = (1-x)^a dx \; v = -\dfrac{(1-x)^{a+1}}{a+1}$

$$I_{(a,b)} = \left[-\frac{(1-x)^{a+1}}{a+1}x^b\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{a+1}}{a+1}x^b dx = \frac{b}{a+1}I_{(a+1,b-1)}$$

4) $I_{(a,n)} = \dfrac{n}{a+1}I_{(a+1,n-1)} = \dfrac{n}{a+1}\dfrac{n-1}{a+2}I_{(a+2,n-2)} = \dfrac{n}{a+1}\dfrac{n-1}{a+2}\dfrac{n-2}{a+3}I_{(a+3,n-3)} = \cdots$

$$= \frac{n}{a+1}\frac{n-1}{a+2}\frac{n-2}{a+3}\cdots\frac{1}{a+n}I_{(a+n,0)} = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\frac{1}{a+n+1}$$