I. Primitives et intégrales

I-1. Primitives d'une fonction continue

Définition 1 : On appelle primitive F d'une fonction numérique réelle f toute fonction F dérivable telle que $F'=f$.

Remarque 1 : Si F est une primitive de f, alors toute fonction $x \to F(x)+c$ où $c\in\mathbf{R}$ est encore une primitive de f. La réciproque est vraie sur un intervalle.

Conséquence : Soit D une réunion d'intervalles et F une primitive de f sur D. Alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $F+c$ où c est une fonction constante sur chaque intervalle de D.

Notation : (Leibniz) On note $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f.

Théorème 1 : Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.

I-2. Intégrale sur un segment

Définition 2 : Soit f une fonction continue sur un segment $[a\ \ b]$ ($a<b$) et F une primitive de f sur $[a\ \ b]$. Le réel $F(b)$ - $F(a)$ est indépendant de la primitive choisie, on l'appelle l'intégrale de f sur $[a\ \ b]$. On note $F(b)-F(a)=\int_{[a\,b]} f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$

Remarque 2 : La variable d'intégration x est une variable muette, elle peut être remplacée par toute autre variable : $\int_{[a\,b]} f(x)dx=\int_{[a\,b]} f(t)dt\ldots$

Proposition 1 : Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\ \ b]$ et λ un réel. Alors :

- $\int_{[a\,b]}(f+g)(x)dx=\int_{[a\,b]} f(x)dx+\int_{[a\,b]} g(x)dx$
- $\int_{[a\,b]}(\lambda f)(x)dx=\lambda\int_{[a\,b]} f(x)dx$

Généralisation : Soient $f_1, f_2, \ldots, f_k$ k fonctions continues sur $[a\ \ b]$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ k réels.

Alors : $\int_{[a\,b]}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)dx=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\int_{[a\,b]} f_i(x)dx$

Proposition 2 : Croissance

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\ \ b]$ et telles que $\forall x\in[a\ \ b]$ $g(x)\leq f(x)$ alors :

$\int_{[a\,b]} g(x)dx\leq\int_{[a\,b]} f(x)dx$

En particulier :

- $\forall x\in[a\ \ b]$ $0\leq f(x) \Rightarrow 0\leq\int_{[a\,b]} f(x)dx$
- $\left|\int_{[a\,b]} f(x)dx\right|\leq\int_{[a\,b]}\left|f(x)\right|dx$

Proposition 3 : Additivité

Soient f une fonction continue sur $[a\ \ b]$ et $c\in]a\ \ b[$ alors :

$\int_{[a\,b]} f(x)dx=\int_{[a\,c]} f(x)dx+\int_{[c\,b]} f(x)dx$

Définition 3 : Soit f une fonction continue sur $[a\ \ b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a\ \ b]$ le nombre : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_{[a\,b]} f(x)dx$

Proposition 4 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\ \ b]$ alors : $\left|\int_{[a\,b]}(fg)(x)dx\right| \leq \operatorname*{Sup}_{[a\,b]}|f|\int_{[a\,b]} g(x)dx$

En particulier : $|\mu| \leq \operatorname*{Sup}_{[a\,b]}|f|$

Proposition 5 : formule de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a\ \ b]$ alors il existe un point c de $[a\ \ b]$ tel que $\mu = f(c)$ ou encore : $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ (formule de la moyenne)

Notation étendue :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux points de I. On définit le réel $\int_a^b f(x)dx$ par :

- $\int_a^b f(x)dx = 0$ si $a = b$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a\,b]} f(x)dx$ si $a < b$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b\,a]} f(x)dx$ si $a > b$

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Proposition 6 : fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a\ \ b]$ alors pour tout x et c de $[a\ \ b]$ la fonction F définie sur $[a\ \ b]$ par : $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ est continue et dérivable et de dérivée $F' = f$. C'est la primitive de f qui s'annule en c.

II. Calcul des Primitives

II-1. Primitives des fonctions usuelles

Intervalle	Fonction	Primitives
$\mathbf{R}_+^*$	x^m $(m\neq 1)$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+c$
$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\mathbf{R}-\{a\}$	$(x-a)^{-1}$	$\ln\lvert x-a\rvert+c$
$\mathbf{R}_+^*$	$\ln x$	$x\ln x-x+c$
$\mathbf{R}$	$e^{\lambda x}$ $(\lambda\neq 0)$	$\dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda x}+c$
$\mathbf{R}$	a^x $(a>0$ et $a\neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x+c$
$\mathbf{R}$	$\cos(\lambda x)$ $(\lambda\neq 0)$	$\dfrac{1}{\lambda}\sin\lambda x+c$
$\mathbf{R}$	$\sin(\lambda x)$ $(\lambda\neq 0)$	$-\dfrac{1}{\lambda}\cos\lambda x+c$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\quad\dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+c$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\quad\dfrac{\pi}{2}\right[$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ou $1+\tan^2 x$	$\tan x+c$
$]0\quad\pi[$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x}+c$
$\mathbf{R}$	$\mathrm{ch}(\lambda x)$ $(\lambda\neq 0)$	$\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{sh}\lambda x+c$
$\mathbf{R}$	$\mathrm{sh}(\lambda x)$ $(\lambda\neq 0)$	$\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{ch}\lambda x+c$
$\mathbf{R}$	$\mathrm{th}x$	$\ln(\mathrm{ch}x)+c$
$\mathbf{R}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ ou $1-\mathrm{th}^2 x$	$\mathrm{th}x+c$
$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\dfrac{1}{\mathrm{th}x}+c$
$\mathbf{R}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$	$\begin{cases}2\mathrm{Arctan}e^x+c\\ 2\mathrm{Arctanth}\dfrac{x}{2}=\mathrm{Arctansh}x+c\end{cases}$
$\mathbf{R}^*$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}x}$	$\ln\mathrm{th}\dfrac{x}{2}+c$
$\mathbf{R}-\{\pi/2+\pi\mathbf{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert+c$
$\mathbf{R}-\pi\mathbf{Z}$	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert+c$
$\mathbf{R}$	$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{Arc}\tan\dfrac{x}{a}+c$

$]-\infty\ a[$ ou $]-a\ a[$ ou $]a\ \infty[$	$\dfrac{1}{a^2-x^2}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert+c$
$]-a\ a[$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}+c$
R	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a\in\mathbf{R}^*)$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$
R$-]-a\ a[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a\in\mathbf{R}_+^*)$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+c$

II-2 Changement de variable

Théorème 2 :
Soit φ une fonction de classe C^1 sur $[a\ b]$ et f une fonction continue sur φ ($[a\ b]$) alors :

$$\int_a^b f\circ\varphi(x).\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

II-3 Intégration par parties

Théorème 3 :
Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a\ b]$ alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

$$\int u'v=uv-\int uv'$$

Théorème 3 bis : Intégration par parties généralisée
Soit u et v deux fonctions de classe C^n sur $[a\ b]$ alors :

$$\int u^{(n)}v=u^{(n-1)}v-u^{(n-2)}v'+\cdots+(-1)^{n-1}uv^{(n-1)}+(-1)^n\int uv^{(n)}$$

III. Intégration des fonctions rationnelles

III-1. Généralités sur les fonctions rationnelles

Définition 1 : On appelle <u>fonction rationnelle</u> f une fonction numérique réelle $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux fonctions polynomiales.

Remarque 1 : Si d°($p(x)$)≤ d°($q(x)$) on dit que $f(x)$ est <u>propre</u> sinon on peut toujours, par division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$ ramener $f(x)$ à la somme d'une fonction polynomiale $e(x)$ appelée <u>partie principale</u> et d'une fonction rationnelle $g(x)$ propre : $f(x)= e(x)+g(x)$.
Dans toute la suite on considère que $f(x)$ est propre.

Définition 2 : On appelle <u>élément simple de première espèce</u> une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{\alpha}{(x-a)^n}$ où $n\in\mathbf{N}^*$ $a\in\mathbf{R}$ et $\alpha\in\mathbf{R}$.

On appelle <u>élément simple de deuxième espèce</u> une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^n}$ où $n\in\mathbf{N}^*$ b, c, β et γ sont des réels et $b^2-4c<0$

Théorème 4 : Décomposition en éléments simples
Toute fonction rationnelle (propre) $f(x)$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments simples de première espèce et d'éléments simples de deuxième espèce.

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p_i}\frac{\alpha_k^i}{(x-a_i)^k}\right)+\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{q_j}\frac{\beta_l^j x+\gamma_l^j}{(x^2+b_jx+c_j)^l}\right)$$

où $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}p_i+2\sum_{j=1}^{q}q_j=$ degré du dénominateur de $f(x)$

III-2. Méthode d'intégration des fonctions rationnelles

- La partie principale $e(x)$ (polynomiale) s'intègre terme à terme.
- Les éléments simples de première espèce :

  si $n=1$ $\displaystyle\int\frac{\alpha}{(x-a)}dx=\alpha\ln|x-a|+c$ si $n\neq 1$ $\displaystyle\int\frac{\alpha}{(x-a)^n}dx=\frac{\alpha}{1-n}(x-a)^{1-n}+c$
- Les éléments simples de deuxième espèce :
  - On transforme x^2+bx+c en $(x-p)^2+q^2$
  - On fait le changement de variable : $x-p=qt$ pour obtenir

    $\displaystyle\int\frac{\beta(p+qt)+\gamma}{q^{2n}(1+t^2)^n}qdt=\int\frac{\beta_1t+\gamma_1}{(1+t^2)^n}dt$ qui s'exprime au moyen de deux intégrales :

    $$I_n=\int\frac{t}{(1+t^2)^n}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-n)}(1+t^2)^{1-n} & \text{si } n\neq 1\\ \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) & \text{si } n=1\end{cases}$$

$J_n=\displaystyle\int\frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ qui sera calculée le plus souvent en posant

$t=\tan\varphi$ $\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ $J_n=\displaystyle\int\cos^{2n-2}\varphi d\varphi$

IV. Intégrales se ramenant à des intégrations de fonctions rationnelles

IV-1. Fonctions rationnelles en sin*x* et cos*x*

Technique : Soit *f* une fonction rationnelle en sin*x* et cos*x*, c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux polynômes trigonométriques.

Règles de Bioche : Un changement de variable adéquat est obtenu par une nouvelle variable invariante par la même transformation qui laisse invariant $f(x)\mathrm{d}x$.

- Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation : $x \to -x$, on prendra $t=\cos x$
- Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation : $x \to \pi-x$, on prendra $t=\sin x$
- Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation : $x \to \pi+x$, on prendra $t=\tan x$ sur des intervalles où t est défini.

➢ Dans tous les cas, on peut prendre pour variable $t=\tan\dfrac{x}{2}\quad dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ sur des intervalles ne contenant pas $\pi+2k\pi\quad k\in\mathbf{Z}$.

Rappel : $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\quad \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\quad \tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

IV-2. Fonctions rationnelles en sh*x* et ch*x*

Technique : Soit *f* une fonction rationnelle en sh*x* et ch*x*, c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $p(x)$ sont deux polynômes en sh*x* et ch*x*.

- On obtient un changement de variable en utilisant l'analogie sin ↔ sh et cos ↔ ch
- Dans tous les cas, on peut prendre pour variable $t=e^x$
- Dans tous les cas, on peut prendre pour variable $t=\mathrm{th}\dfrac{x}{2}\quad dx=\dfrac{2dt}{1-t^2}$

Rappel : $\mathrm{ch}x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\quad \mathrm{sh}x=\dfrac{2t}{1-t^2}\quad \mathrm{th}x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

IV-3. Fonctions rationnelles en *x* et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (Intégrales abéliennes)

Technique : On écrit le trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2-d\right]$ et $d=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$. Si $d\neq0$ on se ramène par un changement de variable $t=\dfrac{1}{\sqrt{|d|}}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$ au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en t et l'un des trois cas suivants :

- $\sqrt{1-t^2}$: on pose $t=\cos u$ avec $u\in[0\quad \pi]$ ou $t=\sin u$ avec $u\in[-\pi/2\quad \pi/2]$
- $\sqrt{t^2-1}$: on pose $t=\varepsilon\mathrm{ch}u$ avec $t\in\mathbf{R}^+$, $\varepsilon=1$ si les valeurs de t correspondant au domaine d'intégration sont positives, $\varepsilon=-1$ sinon.
- $\sqrt{t^2+1}$: on pose $t=\mathrm{sh}u$ avec $u\in\mathbf{R}$ ou $t=\tan u$ avec $u\in[-\pi/2\quad \pi/2]$

Cas particulier : Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax+b}$

On effectue le changement de variable : $t=\sqrt{ax+b}$

IV-4. Fonctions rationnelles en *x* et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ avec ad-bc≠0 et *n*≥2

Technique : On pose $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ donc $t^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, d'où $x=\dfrac{dt^n-b}{-ct^n+a}$ et $dx=\dfrac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}dt$.

On se ramène donc au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en *t*.

V. Notions sur les équations différentielles

V-1. Equations différentielles du premier ordre

Définition 1 : On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme :
(E) $y'=f(x,y)$
où x est une variable réelle, f une application d'un ouvert O de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, y une fonction numérique réelle (inconnue) de la variable x et y' la dérivée de y.
Une solution de l'équation (E) est la donnée d'un intervalle ouvert $I\subset\mathbf{R}$, et d'une application $y : I \to \mathbf{R}$ telles que $\forall x\in I \quad y'(x)=f(x, y(x))$
Résoudre l'équation (E) c'est trouver l'ensemble des solutions $S_{(E)}$ de (E). On dit aussi intégrer l'équation (E).

Définition 2 : Une solution (I, y) de (E) est dite maximale si pour tout intervalle $J\supset I$ $J\neq I$, il n'existe pas de fonction $y : I \to \mathbf{R}$ telle que $y'(x)=f(x, y(x))$ $\forall x\in J$.

Remarque 1 : Pour une même équation on peut avoir plusieurs solutions maximales.

Théorème 5 : (existence et unicité)
Soit O un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et soit $\begin{array}{cccc} f: O & \to & \mathbf{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(u,v) \end{array}$ une application continue telle que $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ existe et soit continue dans O. Alors pour tout (x_0,y_0) de O il existe une solution maximale, et une seule, de l'équation (E) telle que $y(x_0)=y_0$ « condition initiale ».

IV-2. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 3 : Ce sont les équations de la forme : (E) $y'=f(x,y)=a(x)y+b(x)$ où a et b sont des applications définies et continues sur un intervalle $I\subset\mathbf{R}$. $a(x)$ et $b(x)$ s'appellent les coefficients de l'équation (E).

Définition 4 : Une équation linéaire (E) $y'=a(x)y+b(x)$ est dite homogène si b=0 pour tout x de I.
L'équation homogène associée à une équation linéaire (E) $y'=a(x)y+b(x)$ est (E_H) $y'=a(x)y$.

Lemme 1 : Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) alors y_1-y_2 est une solution de (E_H).

Corollaire 1 : La solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant à la solution générale de (E_H) une solution (particulière) de l'équation (E).

Proposition 1 : Les solutions maximales de (E_H) $y'=a(x)y$ sur I sont les fonctions $y(x)=ke^{A(x)}$ où k est une constante quelconque et A est une primitive de a sur I.

Théorème 6 :
La solution générale de l'équation (E) $y'=a(x)y+b(x)$ sur I est de la forme $y(x)=ke^{A(x)}+l(x)e^{A(x)}$ où k est une constante quelconque et l est une primitive fixée de $b(x)e^{-A(x)}$.

Cas de seconds membres particuliers :

❶ Si $b(x)=e^{sx}$
On cherche une solution particulière sous la forme :
 i. $y=\lambda e^{sx}$ si $s \neq a$
 ii. $y=\lambda xe^{sx}$ si $s = a$

❷ Si $b(x)$ est un polynôme de degré n, $b(x)=P(x)$

On cherche une solution particulière sous la forme $y=Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré :

i. n si $a\neq 0$
ii. $n+1$ si $a=0$

❸ Si $b(x)=e^{sx}P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme de degré n

On cherche une solution particulière sous la forme :

i. $y=e^{sx}Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré n si $s\neq a$
ii. $y=e^{sx}Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ si $s=a$

❹Si $b(x)=b_1(x)+b_2(x)$

Soit y_1 une solution particulière de (E_1) : $y'=a(x)y+b_1(x)$ et y_2 une solution particulière de (E_2) : $y'=a(x)y+b_2(x)$ alors y_1+y_2 est une solution particulière de (E) : $y'=a(x)y+b(x)$

V-3. Equations différentielles linéaires du second ordre

Définition 5 : Ce sont les équations de la forme : (E) $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$ où a , b et c sont des fonctions données définies et continues sur un intervalle $I\subset\mathbf{R}$ et y est une fonction (inconnue) de la variable x, définie sur I.

Proposition 2 : Pour tout x de I, il existe une et une seule solution maximale y telle que $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y'_0$ où y_0 et y'_0 sont deux réels fixés (conditions initiales)

Corollaire 2 : Si $c(x)=0$ pour tout x de I, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est un espace vectoriel de dimension 2.

Définition 6 : Une équation linéaire du second ordre (E) : $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$ est dite <u>homogène</u> si $c=0$ pour tout x de I. L'équation homogène associée à une équation linéaire (E) est (E_H) : $y''+a(x)y'+b(x)y=0$.

Lemme 2 : Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) alors y_1-y_2 est une solution de (E_H).

Conséquence : Pour avoir toutes les solutions de (E) il suffit de connaître toutes les solutions de (E_H) et une solution (particulière) de (E).

Définition 7 : Une <u>équation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants</u> est une équation de la forme : (E) $y''+ay'+by=c(x)$ où a, b sont des constantes et c est une fonction donnée définie et continue sur un intervalle $I\subset\mathbf{R}$ et y est une fonction (inconnue) de la variable x, définie sur I. On appelle <u>équation caractéristique de (E)</u> l'équation $r^2+ar+b=0$

Théorème 7 : Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (E).

❶ Si $\Delta>0$ (2 racines réelles distinctes r_1 et r_2) alors la solution générale de l'équation homogène (E_H) est donnée par : $y=\alpha_1 e^{r_1x}+\alpha_2 e^{r_2x}$ α_1 et α_2 sont deux réels quelconques.

❷ Si $\Delta=0$ (1 racines réelles double r_1) alors la solution générale de l'équation homogène (E_H) est donnée par : $y=\alpha_1 e^{r_1x}+\alpha_2 xe^{r_1x}$ α_1 et α_2 sont deux réels quelconques.

❸Si $\Delta<0$ (2 racines complexes conjuguées $r_1=u+iv$ et $r_2=u-iv$) alors si $v\neq 0$ la solution générale de l'équation homogène (E_H) est donnée par : $y=e^{ux}(\alpha_1\cos vx+\alpha_2\sin vx)$ α_1 et α_2 sont deux réels quelconques.

Cas de seconds membres particuliers :

❶ Si $c(x)=e^{sx}$

On cherche une solution particulière sous la forme :

iii. $y=\lambda e^{sx}$ si s n'est pas une racine de l'équation caractéristique

iv. $y=\lambda x e^{sx}$ si s est racine simple de l'équation caractéristique
v. $y=\lambda x^2 e^{sx}$ si s est racine double de l'équation caractéristique

❷ Si $c(x)$ est un polynôme de degré n, $c(x)=P(x)$

On cherche une solution particulière sous la forme $y=Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré :

iii. n si $b\neq 0$
iv. $n+1$ si $b=0$ et $a\neq 0$
v. $n+2$ si $b=0$ et $a=0$

❸ Si $c(x)=e^{sx}P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme de degré n

On cherche une solution particulière sous la forme :

iii. $y=e^{sx}Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré n si s n'est pas une racine de l'équation caractéristique
iv. $y=e^{sx}Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ si s est racine simple de l'équation caractéristique
v. $y=e^{sx}Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n+2$ si s est racine double de l'équation caractéristique

❹Si $c(x)=c_1(x) + c_2(x)$

Soit y_1 une solution particulière de (E_1) : $y''+a(x)y'+b(x)y = c_1(x)$ et y_2 une solution particulière de (E_2) : $y''+a(x)y'+b(x)y = c_2(x)$ alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E) : $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$

VI. Formulaire

VI-1. Trigonométrie (euclidienne)

Formule fondamentale : Pour tout réel a : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

Equations fondamentales :

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} \quad x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ $\quad \sin x = \sin a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} \quad x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} \quad x = a + k\pi$

Angles associés :

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad \sin(-x) = -\sin x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$

$\cos(\pi+x) = -\cos x$ $\quad \sin(\pi+x) = -\sin x$ $\quad \tan(\pi+x) = \tan x$

$\cos(\pi-x) = -\cos x$ $\quad \sin(\pi-x) = \sin x$ $\quad \tan(\pi-x) = -\tan x$

$\cos(\pi/2-x) = \sin x$ $\quad \sin(\pi/2-x) = \cos x$ $\quad \tan(\pi/2-x) = \operatorname{cotan} x$

$\cos(\pi/2+x) = -\sin x$ $\quad \sin(\pi/2+x) = \cos x$ $\quad \tan(\pi/2+x) = -\operatorname{cotan} x$

Formules d'addition : Pour tout couple (a,b) de réels

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (\sin a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\ a, b, a+b \neq \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}.\pi) \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}\ a, b, a+b \neq \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}.\pi)$$

Formules de linéarisation : Pour tout couple (a,b) de réels

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Formules de factorisation : Pour tout couple (p,q) de réels

$$\cos p + \cos q = 2\left[\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right] \quad \cos p - \cos q = -2\left[\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\right]$$

$$\sin p + \sin q = 2\left[\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right] \quad \sin p - \sin q = 2\left[\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\right]$$

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi) \text{ avec } r = \sqrt{a^2+b^2} \text{ et } \varphi \in]-\pi\ \pi] \text{ défini par } \cos\varphi = \frac{a}{r} \text{ et } \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

Formules de duplication : Pour tout réel a

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \quad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\ a, 2a \neq \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}.\pi)$$

En posant $t = \tan\frac{a}{2}\ a, 2a \neq \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}.\pi)$ $\quad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

Fonctions circulaires réciproques :

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arc}\sin x \\ x \in [-1\ \ 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}\ \ +\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \begin{cases} y = \operatorname{Arccos} x \\ x \in [-1\ \ 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in]0\ \ \pi[\end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arctan} x \\ x \in]-\infty\ \ +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}\ \ +\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Dérivées :

$$\sin' x = \cos x \quad \cos' x = -\sin x \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{Arc}\sin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \mathrm{Arc}\cos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \mathrm{Arc}\tan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

VI-2. Trigonométrie (hyperbolique)

Formule fondamentale : Pour tout réel a : $\mathrm{ch}^2 a$ - $\mathrm{sh}^2 a$ =1

Formules d'addition : Pour tout couple (a,b) de réels

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b \quad \mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b \quad \mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1 + \mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b} \quad \mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\,a - \mathrm{th}\,b}{1 - \mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b}$$

Formules de linéarisation : Pour tout couple (a,b) de réels

$$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)\right] \quad \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)\right]$$

$$\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)\right]$$

Formules de factorisation : Pour tout couple (p,q) de réels

$$\mathrm{ch}\,p + \mathrm{ch}\,q = 2\left[\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}\right] \quad \mathrm{ch}\,p - \mathrm{ch}\,q = 2\left[\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}\right]$$

$$\mathrm{sh}\,p + \mathrm{sh}\,q = 2\left[\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}\right] \quad \mathrm{sh}\,p - \mathrm{sh}\,q = 2\left[\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}\right]$$

Formules de duplication : Pour tout réel a

$$\mathrm{ch}2a = \mathrm{ch}^2 a + sh^2 a = 2\mathrm{ch}^2 a - 1 = 1 + 2sh^2 a$$

$$\mathrm{sh}2a = 2\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,a \quad \mathrm{th}2a = \frac{2\mathrm{th}\,a}{1+\mathrm{th}^2 a}$$

En posant $t = \mathrm{th}\frac{a}{2}$ $\quad \mathrm{ch}\,a = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \mathrm{sh}\,a = \frac{2t}{1-t^2} \quad \mathrm{th}\,a = \frac{2t}{1+t^2}$

Fonctions hyperboliques réciproques :

$$\begin{cases} y = \mathrm{Argch}x \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{ch}\,y \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad y = \mathrm{Argsh}x \Leftrightarrow x = \mathrm{sh}\,y \qquad \begin{cases} y = \mathrm{Argth}x \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \mathrm{th}\,y$$

Dérivées :

$$\mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\,x \quad \mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\,x \quad \mathrm{th}' x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$\mathrm{Arc}\sin' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \mathrm{Argchs}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \mathrm{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

TABLE des MATIERES