Travaux Dirigés N°1

Primitives des fonctions usuelles

EL METHNI M.

Exercice I :

1) Trouver les primitives suivantes :

a) $\int(3x+4x^2)dx$ **b)** $\int\frac{dx}{x^2}$ **c)** $\int\frac{(3x^2-4x^3+1)}{x^2}dx$

d) $\int\frac{(3x^2-4x^3+1)}{x}dx$ **e)** $\int(\sin^2 x+\cos x)dx$ **f)** $\int\sin x\cos 3x dx$

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{1} x\,|\,x\,|\,dx$ **b)** $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos x dx$

Exercice II :

Trouver de deux manières les primitives suivantes :

a) $\int 4x(1+6x^2)dx$ **b)** $\int x^2(x^3+2)^2 dx$ **c)** $\int e^x(e^x+1)^2 dx$

Exercice III :

Trouver les primitives suivantes :

a) $\int\frac{1}{2x+1}dx$ **b)** $\int\frac{2x}{x^2-3}dx$ **c)** $\int\frac{x^3+1}{(x^4+4x+1)^2}dx$ **d)** $\int\frac{x^3}{1-x}dx$

Exercice IV :

On considère la fonction : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a\neq 0$

1) Donner une expression simple de $g(x)=f(x)-\frac{a}{c}$ et calculer $\int g(x)dx$

2) Déduire de ce qui précède $\int f(x)dx$

Application : Calculer **a)** $\int\frac{4x+6}{x-3}dx$ **b)** $\int\frac{-x+3}{2x+1}dx$

Travaux Dirigés N°2

Intégrales, propriétés

EL METHNI M.

Exercice I :

f et *g* sont deux fonctions telles que : $\int_0^3 f(x)dx = 5$ et $\int_0^3 g(x)dx = 8$

Calculer $\int_0^3 h(x)dx$ où $\forall x \in [0 \quad 3]$ $h(x)=7f(x)-2g(x)$

Exercice II :

Pourquoi est-il faux d'affirmer que $\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx = -4$?

Pourquoi est-il faux d'affirmer que $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta = 0$?

Exercice III :

Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx = \int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{2\pi}\cos x\,dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0-0=0$$

Exercice IV :

Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, qu'en général si *f* et *g* sont deux fonctions intégrables sur $[a \quad b]$ on n'a pas nécessairement : $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$

Exercice V :

1) Montrer que si *f* est paire alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

2) Montrer que si *f* est impaire alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

3) Montrer que si *f* est périodique de période *T* alors :

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ et $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$

Exercice VI :

Sans chercher à les calculer, préciser quelle est la plus grande des deux intégrales proposées :

a) $\int_0^1 \cos(x^2)dx$ et $\int_0^1 \cos(x\sqrt{x})dx$ **b)** $\int_1^2 e^{x^2}dx$ et $\int_1^2 (e^x)^2 dx$

Exercice VII :

Sans chercher à calculer les intégrales proposées, établir les encadrements :

$2 \le \int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx \le \sqrt{5}$ $\qquad 0 \le \int_0^{\pi/4} x\sqrt{\tan x}\,dx \le \frac{\pi^2}{32}$

Exercice VIII :

1) Montrer que la valeur moyenne sur $[a \quad b]$ de $f(x)=\alpha x+\beta$ est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2) Interpréter géométriquement.

Exercice IX :

Calculer la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_1^{1+1/n}\left(\frac{n\sin(\pi/2)}{1+x^2}\right)dx$ (Indication : formule de la moyenne).

Travaux Dirigés N°3

Intégration par changement de variable

EL METHNI M.

Exercice I :

Trouver les primitives suivantes :

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{4-(x+2)^2}}dx$ **c)** $\int \frac{1}{4x^2+9}dx$

d) $\int \frac{1}{9-x^2}dx$ **e)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **f)** $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}dx$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}dx$ **h)** $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **i)** $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$

Exercice II :

1) Montrer que le changement de variable $t=a+b-x$ permute les bornes a et b dans une intégrale

2) <u>Application</u> : Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)dx$

Exercice III :

On se propose de calculer l'intégrale : $I=\int_0^{3\pi/4}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx$ en effectuant l changement de variable $t=\tan x$.

1) Montrer que $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ et que $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$.

2) Montrer que ce changement de variable transforme I en $I=\int_0^{-1}\frac{1}{1+2t^2}dx$

3) Expliquer pourquoi il est inutile de continuer le calcul en exhibant l'erreur.

Exercice IV :

A tout couple (a,b) de réels strictement positifs, on associe $I_{(a,b)}=\int_0^1(1-x)^a x^b dx$

Montrer, grâce à un changement de variable que : $I_{(a,b)}=I_{(b,a)}$

Travaux Dirigés N°4

Intégration par parties

EL METHNI M.

Exercice I :

Calculer les intégrales suivantes :

a) I=$\int_1^e x\ln x dx$ **b)** I=$\int_0^\pi x\sin x dx$ **c)** I=$\int_0^\pi x^2\cos x dx$ **d)** I=$\int_0^{\pi/2} x\cos nx dx$ avec $n\in\mathbf{N}$

e) I=$\int_a^b (2x^2-6x+4)\sin 3x dx$ **f)** I=$\int_0^1 (3x^2-4)e^x dx$ **g)** I=$\int_0^1 (x-2)e^{-x/2}dx$

h) I=$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ **i)** I=$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

Exercice II :

On considère les deux intégrales : $I=\int_0^\pi e^{-x}\sin 2x dx$ et $J=\int_0^\pi e^{-x}\cos 2x dx$

1) Trouver deux relations entre I et J en intégrant par parties

2) En déduire I et J.

Exercice III :

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on considère l'intégrale : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$

1) Calculer I_0.

2) Calculer I_1 par une intégration par parties

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ on a $(3+2n)I_n=2nI_{n-1}$. En déduire I_2, I_3 et I_4

Exercice IV :

1) Calculer : $I(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$

2) Par une intégration par parties déduire de ce qui précède $F(x)=\int_0^x \frac{t\sin t}{\cos^3 t}dt$. Calculer $F(\pi/4)$.

Exercice V :

A tout couple (a,b) de réels strictement positifs, on associe $I_{(a,b)}=\int_0^1 (1-x)^a x^b dx$

1) Montrer, grâce à un changement de variable que : $I_{(a,b)}=I_{(b,a)}$

2) Calculer $I_{(a,b)}$ lorsque $a=0$ ou $b=0$

3) On suppose $b\geq 1$; exprimer $I_{(a,b)}$ en fonction de $I_{(a+1,b-1)}$

4) En déduire la valeur de $I_{(a,n)}$ pour $n\in\mathbf{N}^*$.

Intégration des fonctions rationnelles

EL METHNI M.

Exercice I :

Effectuer la division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$ dans les cas suivants :

a) $p(x)=x^4-x^3-x^2+4x-5 \qquad q(x)=x^2+x-2$

b) $p(x)=x^5+8x^3+12x \qquad q(x)=x^2+6$

Exercice II :

Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{(2x-3)^2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+x-4}{x^2(x+4)}$ **c)** $f(x)=\dfrac{4x^3}{(x^2-1)^2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{2}{(1+x)(1+x^2)}$

Exercice III :

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(2x-3)^2}dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2+x-4}{x^2(x+4)}dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{4x^3}{(x^2-1)^2}dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{2}{(1+x)(1+x^2)}dx$

Exercice IV :

Soit $x\in\mathbf{R}\backslash\{-1\}$

1) Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{2}{(1+t)(1+t^2)}dt$

2) Calculer $\displaystyle F(x)=\int_0^x \frac{2\arctan t}{(1+t)^2}dt$ en se ramenant à la question précédente par une intégration par parties.

3) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$

EXERCICE V :

1) Trouver trois réels a, b et c tels que : $\dfrac{2t}{(1+t)(1+t^2)}=\dfrac{a}{(1+t)}+\dfrac{bt+c}{(1+t^2)}$

2) Calculer : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$

Exercice VI :

Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^3 x}{\mathrm{sh} x}dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x+\sin 2x}dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$ **d)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2+\sqrt{x(4-x)}}dx$

Exercice VII :

Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+x}}dx$ en posant $t=\sqrt[6]{1+x}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx$ en posant $x=2\sin t$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}dx$ en posant $t=\sqrt{\cos x}$

Intégrale de Riemann

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Calculer en utilisant la <u>définition</u> de l'intégrale de Riemann : $I = \int_0^1 x dx \quad J = \int_0^1 x^2 dx$

Rappel : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE II :

Soit $x>0$

1) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n} = \frac{1}{n}\frac{e^x - 1}{e^{x/n} - 1}$

2) En déduire que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n}\right) = \frac{e^x - 1}{x}$

3) Déduire de ce qui précède que $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$

EXERCICE III :

1) Pour $0<\varepsilon<1$ calculer $\int_\varepsilon^1 \ln x dx$, en déduire que $\int_0^1 \ln x dx = -1$

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{1}{n}(n!)^{1/n} \quad n\geq 1$

2) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \ln U_n = \int_0^1 \ln x dx$. En déduire $\lim_{n\to\infty} U_n$

3) Donner un équivalent, à l'infini, de $(n!)^{1/n}$. Peut-on avoir $n! \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

EXERCICE IV :

1) Utiliser la définition de l'intégrale de Riemann pour montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{a}{n}+\cos\frac{2a}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)a}{n}\right) = \frac{\sin a}{a}$$

2) Calculer $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

EXERCICE V :

1) a étant un réel donné, montrer que la suite de terme général

$U_n(a) = \left(\frac{a^2}{n\sqrt{n^2+a^2}}+\frac{2a^2}{n\sqrt{n^2+4a^2}}+\cdots+\frac{na^2}{n\sqrt{n^2+n^2a^2}}\right)$ est convergente et calculer sa limite $U(a)$.

2) Calculer $\lim_{a\to 0}\frac{U(a)}{a^2}$

Calcul intégral : Problèmes

EL METHNI M.

Exercice I :

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1) Calculer I_0 et I_1

2) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

3) Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante et minorée.

4) Calculer $\lim I_n$ et $\lim nI_n$

Exercice II :

Soit α un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $U_n = \int_0^\alpha e^{-nt^2} dt$

(On ne cherchera pas à calculer U_n).

1) Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}$ $e^{-t^2} \leq 1$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

2) **a)** Montrer que pour $n \geq 2$ on a : $\int_0^{1/\ln n} e^{-nt^2} dt \leq \dfrac{1}{\ln n}$

b) Montrer qu'il existe un entier n_0, tel que pour $n \geq n_0$ on ait : $\dfrac{1}{\ln n} \leq \alpha$

c) Montrer que : $0 < \int_{1/\ln n}^{\alpha} e^{-nt^2} dt \leq \left(\alpha - \dfrac{1}{\ln n} \right) e^{-n/(\ln n)^2}$

3) Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice III : Intégrales de Wallis

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$

1) Calculer I_0 et I_1

2) Montrer que la suite (I_n) est convergente.

3) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) Montrer que le produit $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constant.

5) Calculer : $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n \sqrt{n}$

6) Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produits et en déduire une suite de rationnels convergent vers π

Exercice IV :

On considère la fonction f définie sur [0 1] par : $\begin{cases} f(t) = \dfrac{t-1}{\ln t} & \text{si } t \in \left]0 \quad 1\right[\\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

1) Montrer que :

a) f est continue sur [0 1]

b) $\forall x \in [0 \ 1]$ $\qquad 0 \leq f(x) \leq 1$

c) $\forall x \in [0 \ 1]$ $\qquad f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$

On pose : $I = \int_0^1 f(t) dt$ et $\forall x \in \left]0 \quad 1\right]$ $I(x) = \int_x^1 f(t) dt$ et $J(x) = \int_x^1 \dfrac{f(t)}{t} dt$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales)

2) Soit K la fonction définie sur]0 1] par : $K(x) = J(x^2) - J(x)$

a) Montrer que K est dérivable sur]0 1] et que : $K'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2f(x^2)\right)$

b) En déduire que : $\forall x \in \left]0 \quad 1\right[\quad I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt$

3) Calculer la dérivée de la fonction : $g(t) = \ln(-\ln t)$ sur]0 1[.

En déduire que, pour tout élément x de]0 1[: $\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\log t}dt\int_{x^2}^{x} = \ln 2 \quad (**)$

4) Montrer que, pour tout x de]0 1[et tout t de]0 x[on a : $0 \le \frac{-1}{\ln t} \le \frac{-1}{\ln x}$

En déduire que, pour tout x de]0 1[: $0 \le \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \le \frac{-x}{\ln x} \quad (***)$

5) A partir de (*), (**) et (***) déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.

6) Etablir que, pour tout x de]0 1] : $I - I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. En déduire que $0 \le I - I(x) \le x$

7) En déduire (finalement!) que $I = \ln 2$

Exercice V :

On considère, pour $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale : $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx$

1) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3

2) Etablir, pour $n>1$, la relation de récurrence $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (On pourra utiliser une intégration par parties).

3) En déduire $\int_0^1 (1-x^2)^{5/2}dx \quad \int_0^1 (1-x^2)^4 dx$

4) Que devient I_n par le changement de variable $x\sin t$? Retrouver alors les valeurs de I_0, I_1, I_2 et I_3

5) Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$

6) Calculer les intégrales $\int_0^{\pi/2} (\cos^6 t + \sin^6 t)dt$ et $\int_0^{\pi/2} (\cos^9 t + \sin^9 t)dt$

Exercice VI :

On considère, pour $n \in \mathbf{N}$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt \quad I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,dt \quad I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt \quad H_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt \quad H_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,dt$$

On pose : $a_n = \frac{1.3.5.\cdots.(2n-3).(2n-1)}{2.4.6.\cdots.(2n-2)2n}$

1) Etablir, pour $n>1$, la relation de récurrence $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (On pourra utiliser une intégration par parties).

2) Calculer I_{2n}, et I_{2n+1}

3) Montrer que $H_{2n} = I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$ et $H_{2n+1} = I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$

4) a) Que devient H_{2n} si on effectue, dans cette intégrale, le changement de variable :
$x = \sqrt{n}\tan t \quad$ avec $\quad 0 \le t \le \pi/2$?

b) Que devient H_{2n+1} si on effectue, dans cette intégrale, le changement de variable :
$x = \sqrt{n}\sin t \quad$ avec $\quad 0 \le t \le \pi/2$

c) Donner alors les expressions les plus simples possibles des intégrales :

$$A_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \text{ et } B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$$ en fonction de n, a_n et π.

5) a) Montrer que $\forall n \geq 0 \;\; H_{2n+1} < H_{2n} < H_{2n-1}$

b) En déduire que $\sqrt{\frac{2n}{2n+1}} < a_n\sqrt{\pi n} < 1$

c) Trouver la limite, quand $n \to \infty$ de $a_n\sqrt{\pi n}$, de A_n et de B_n.

Table des matières