Travaux Dirigés N°2

Intégrales, propriétés

El Methni M

Exercice I :

f et g sont deux fonctions telles que : $\int_0^3 f(x)dx = 5$ et $\int_0^3 g(x)dx = 8$

Calculer $\int_0^3 h(x)dx$ où $\forall x \in [0 \quad 3]$ $h(x)=7f(x)-2g(x)$

Exercice II :

Pourquoi est-il faux d'affirmer que $\int_{-2}^1 (x^2+1)dx = -4$?

Pourquoi est-il faux d'affirmer que $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2\theta}\, d\theta = 0$?

Exercice III :

Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0-0=0$$

Exercice IV :

Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, qu'en général si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a \quad b]$ on n'a pas nécessairement : $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$

Exercice V :

1) Montrer que si f est paire alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

2) Montrer que si f est impaire alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

3) Montrer que si f est périodique de période T alors :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$$

Exercice VI :

Sans chercher à les calculer, préciser quelle est la plus grande des deux intégrales proposées :

a) $\int_0^1 \cos(x^2)dx$ et $\int_0^1 \cos(x\sqrt{x})dx$ **b)** $\int_1^2 e^{x^2}dx$ et $\int_1^2 (e^x)^2 dx$

Exercice VII :

Sans chercher à calculer les intégrales proposées, établir les encadrements :

$$2 \le \int_0^1 \sqrt{4+x^2}\, dx \le \sqrt{5} \qquad 0 \le \int_0^{\pi/4} x\sqrt{\tan x}\, dx \le \frac{\pi^2}{32}$$

Exercice VIII :

1) Montrer que la valeur moyenne sur $[a \quad b]$ de $f(x)=\alpha x+\beta$ est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2) Interpréter géométriquement.

Exercice IX :

Calculer la limite de la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_1^{1+1/n} \left(\frac{n\sin(\pi/2)}{1+x^2}\right)dx$ (Indication : formule de la moyenne).