Travaux Dirigés N°4

Intégration par parties

El Methni M

Exercice I :

Calculer les intégrales suivantes :

a) I=$\int_1^e x\ln x dx$ **b)** I=$\int_0^\pi x\sin x dx$ **c)** I=$\int_0^\pi x^2\cos x dx$ **d)** I=$\int_0^{\pi/2} x\cos nx dx$ avec $n\in\mathbf{N}$

e) I=$\int_a^b (2x^2-6x+4)\sin 3x dx$ **f)** I=$\int_0^1 (3x^2-4)e^x dx$ **g)** I=$\int_0^1 (x-2)e^{-x/2}dx$

h) I=$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ **i)** I=$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

Exercice II :

On considère les deux intégrales : $I=\int_0^\pi e^{-x}\sin 2x dx$ et $J=\int_0^\pi e^{-x}\cos 2x dx$

1) Trouver deux relations entre I et J en intégrant par parties

2) En déduire I et J.

Exercice III :

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on considère l'intégrale : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$

1) Calculer I_0.

2) Calculer I_1 par une intégration par parties

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ on a $(3+2n)I_n=2nI_{n-1}$. En déduire I_2, I_3 et I_4

Exercice IV :

1) Calculer : $I(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$

2) Par une intégration par parties déduire de ce qui précède $F(x)=\int_0^x \frac{t\sin t}{\cos^3 t}dt$. Calculer $F(\pi/4)$.

Exercice V :

A tout couple (a,b) de réels strictement positifs, on associe $I_{(a,b)}=\int_0^1 (1-x)^a x^b dx$

1) Montrer, grâce à un changement de variable que : $I_{(a,b)}=I_{(b,a)}$

2) Calculer $I_{(a,b)}$ lorsque a=0 ou b=0

3) On suppose $b\geq 1$; exprimer $I_{(a,b)}$ en fonction de $I_{(a+1,b-1)}$

4) En déduire la valeur de $I_{(a,n)}$ pour $n\in\mathbf{N}^*$.