Travaux Dirigés N°7

Intégrale : Problèmes

El Methni M

EXERCICE I :

Calculer en utilisant la définition de l'intégrale de Riemann : $I=\int_0^1 xdx \quad J=\int_0^1 x^2dx$

Rappel : $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n-1)}{2} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE II :

Soit $x>0$

1) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n}=\frac{1}{n}\frac{e^x-1}{e^{x/n}-1}$

2) En déduire que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n}\right)=\frac{e^x-1}{x}$

3) Déduire de ce qui précède que $\int_0^x e^t dt=e^x-1$

EXERCICE III :

1) Pour $0<\varepsilon<1$ calculer $\int_\varepsilon^1 \ln x dx$, en déduire que $\int_0^1 \ln x dx=-1$

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n=\frac{1}{n}(n!)^{1/n}$ $n\geq 1$

2) Montrer que $\lim_{n\to\infty}\ln U_n=\int_0^1 \ln x dx$. En déduire $\lim_{n\to\infty} U_n$

3) Donner un équivalent, à l'infini, de $(n!)^{1/n}$. Peut-on avoir $n! \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

EXERCICE IV :

1) Utiliser la définition de l'intégrale de Riemann pour montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{a}{n}+\cos\frac{2a}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)a}{n}\right)=\frac{\sin a}{a}$$

2) Calculer $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

EXERCICE V :

1) a étant un réel donné, montrer que la suite de terme général

$U_n(a)=\left(\frac{a^2}{n\sqrt{n^2+a^2}}+\frac{2a^2}{n\sqrt{n^2+4a^2}}+\cdots+\frac{na^2}{n\sqrt{n^2+n^2a^2}}\right)$ est convergente et calculer sa limite $U(a)$.

2) Calculer $\lim_{a\to 0}\frac{U(a)}{a^2}$