Master ICA
Spécialité IHS
Année 2007/2008

Mathématiques pour l'Informatique
Relations binaires
Jérôme Gensel

I) Relations binaires

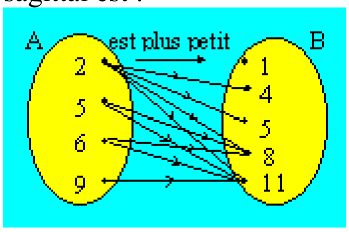
1. Généralités

Définition 1 : Une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie R de E×F. Si $(x,y) \in R$ on dit que x est en relation avec y et on note xRy. Si $(x,y) \notin R$ on dit que x n'est pas en relation avec y et on note $x \not R y$. Dans le cas particulier où E=F on dit que R est une relation binaire définie sur E.

Remarque 1 : Souvent on peut représenter une relation binaire par un diagramme sagittal, par un diagramme cartésien, par une table ou encore par une matrice.

Graphique sagittal d'après http://www.recreomath.qc.ca/am_graphique.htm

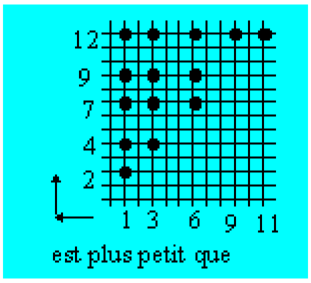
Graphique formé par deux diagrammes de Venn. Des lignes munies d'un sens, appelées flèches, relie des éléments des deux diagrammes. Par convention, l'ensemble de départ est celui d'où partent les flèches. Soit A = {2, 5, 6, 9}, B = {1, 4, 5, 8, 11} et la relation "est plus petit que", le graphique sagittal est :



Le graphe de cette relation est : {(2, 4), (2, 5), (2, 8), (2, 11), (5, 8), (5, 11), (6, 8), (6, 11), (9, 11)}.

Graphique cartésien

Grille dans laquelle chaque droite est à égale distance l'une de l'autre autant horizontalement que verticalement. On identifie par un point les couples qui vérifient la relation. Soit A = {1, 3, 6, 9,11}, B = {2, 4, 7, 9, 12}et la relation "est plus petit que", le graphique cartésien est :



Le graphe de cette relation est {(1, 2), (1, 4), (1, 7), (1, 9), (1, 12), (3, 4), (3, 7), (3, 9), (3, 12), (6, 7), (6, 9), (6, 12), (9, 12), (11, 12)}.

Diagramme cartésien

Tableau à double entrée qui représente une relation entre les éléments d'un ensemble de départ et ceux d'un ensemble d'arrivée. Les éléments d'un ensemble sont écrits à gauche et les éléments de l'autre ensemble en bas ou en haut. Une flèche indique le sens dans lequel la relation doit être lue. La case où la relation s'applique est marquée par un signe distinctif, soit par un x, par un oui ou par un non. Voici un diagramme cartésien :

Manon	x		x	
Lucie		x	x	
Natacha				x
Sébastien	x	x		x
a réussi les exercices nos	1	2	3	4

L'ensemble de départ est {Manon, Lucie, Natacha, Sébastien}. L'ensemble d'arrivée est {1, 2, 3, 4}. La relation est "a fait les exercices numéros". Le graphe de la relation est : {(Manon, 1), (Manon, 3), (Lucie, 2), (Lucie, 3), (Natacha, 4), (Sébastien, 1), (Sébastien, 2), (Sébastien, 4)}. On peut donc lire que Manon a réussi les exercices nos 1 et 3, etc.

Définition 2 : Soit R une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F.
On appelle domaine de R et on note Dom(R) l'ensemble Dom(R,)=$\{x\in E$ tq $\exists y\in F$ tq $xRy\}$
On appelle codomaine de R et on note Codom(R) l'ensemble Codom(R)=$\{y\in F$ tq $\exists x\in E$ tq $xRy\}$
On appelle coupe de R selon un élément x0 de E et on note Coupe$_{x0}$(R) l'ensemble
Coupe$_{x0}\in$ (R) =$\{(x0,y) \in E\times F$ tq $x0Ry\}$

Cas particuliers : Soit R=$\varnothing$, R=E×F et l'égalité Δ : $(x,y) \in\Delta \Leftrightarrow x=y$

Définition 3 : Soit R une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F. On appelle relation réciproque de R et on note R^{-1} la relation binaire de F vers E définie par :
$(\forall(x,y) \in E\times F) \quad (xR^{-1}y) \Leftrightarrow (yRx)$.

Définition 4 : On dit qu'une relation R est incluse dans une relation S et on note $R\subset S$, si $(x,y) \in E\times F$ $\forall(x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in S$. On dit que deux relations R et S sont égales si $R\subset S$ et $S \subset R$.

Définition 5 : Soit R une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F.
On appelle relation complémentaire de R et on note R' la relation binaire de E vers F définie par : $(\forall (x,y) \in E\times F)$ $(x,y) \in R' \Leftrightarrow (x,y)\notin R$.

Définition 6 : Soient R et S deux relations binaires d'un ensemble E vers un ensemble F. On appelle réunion de R et S et on note $T=R\cup S$ la relation binaire T de E vers F définie par : $(\forall (x,y) \in E\times F)$ $xTy \Leftrightarrow (xRy)\vee(xSy)$.
On appelle intersection de R et S et on note $T=R\cap S$ la relation binaire T de E vers F définie par : $(\forall (x,y) \in E\times F)$ $xTy \Leftrightarrow (xRy)\wedge(xSy)$.
De même on définit sur les relations binaires l'analogue des opérations ensemblistes R\S etc.

Définition 7 : Soient R une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F et S une relation binaire de l'ensemble F vers un ensemble G. La composée T de R et S est une relation binaire de l'ensemble E vers l'ensemble G notée T =RoS ou T =RS et définie par :
$(\forall (x,y) \in E\times G) \quad (xTy) \Leftrightarrow (\exists z\in F$ tq $(xRz)\wedge(zSy))$.

Notation 1 : Dans le cas particulier où E=F=G on note R^2 =RoR=RR
Proposition 1 : Soient R une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F, S une relation binaire de l'ensemble F vers un ensemble G et T une relation binaire de l'ensemble G vers un ensemble H. Alors (RS)T =R(ST). (associativité de la composition des relations binaires)

Proposition 2 : Soit R une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F, S et T deux relations binaires de l'ensemble F vers un ensemble G et U une relation binaire de l'ensemble G vers un ensemble H. Alors :

- $R(S\cup T)=RS\cup RT$
- $R(S\cap T)\subset RS\cap RT$
- $(S\cup T)U=SU\cup TU$
- $(S\cap T)U\subset SU\cap TU$

Remarque 3 : La composition des relations binaires étant associative on supprimera les parenthèses : $(RS)T = R(ST)=RST$. En particulier si R une relation binaire définie sur un ensemble E on notera Rn =RR … R où $n\in N^*$. En particulier $R^1 = R$ et par convention R^0 sera l'égalité Δ.

Définition 8 : On dit qu'une relation binaire R définie sur un ensemble E est :

- réflexive si $(\forall x\in E)\quad xRx$.
- symétrique si $(\forall (x,y)\in E^2)\quad (xRy) \Leftrightarrow (yRx)$.
- transitive si $(\forall (x,y,z)\in E^3)\quad (xRy)\wedge(yRz) \Rightarrow (xRz)$.
- antisymétrique si $(\forall (x,y) \in E^2)\quad (xRy)\wedge(yRx) \Rightarrow (x=y)$.

2. Fermeture des relations binaires

Définition 9 : Soit R une relation binaire définie sur un ensemble E. On appelle fermeture réflexive de R et on note r(R) la plus petite (au sens de l'inclusion) relation réflexive définie sur E contenant R. Autrement dit r(R) est la relation binaire définie sur l'ensemble E telle que :

- r(R) est réflexive
- $R\subset r(R)$
- Pour toute relation binaire S réflexive définie sur l'ensemble E, si $S\supset R$ alors $S\supset r(R)$

Définition 10 : Soit R une relation binaire définie sur un ensemble E. On appelle fermeture symétrique de R et on note s(R) la plus petite (au sens de l'inclusion) relation symétrique définie sur E contenant R. Autrement dit s(R) est la relation binaire définie sur l'ensemble E telle que :

- s(R) est symétrique
- $R\subset s(R)$
- Pour toute relation binaire S symétrique définie sur l'ensemble E, si $S\supset R$ alors $S\supset s(R)$

Définition 11 : Soit R une relation binaire définie sur un ensemble E. On appelle fermeture transitive de R et on note t(R) la plus petite (au sens de l'inclusion) relation transitive définie sur E contenant R. Autrement dit t(R) est la relation binaire définie sur l'ensemble E telle que :

- t(R) est transitive
- $R\subset t(R)$
- Pour toute relation binaire S transitive définie sur l'ensemble E, si $S\supset R$ alors $S\supset t(R)$

Remarque 4 : Soit R une relation binaire définie sur un ensemble E. Alors

- R est réflexive si et seulement si R=r(R)
- R est symétrique si et seulement si R=s(R)
- R est transitive si et seulement si R=t(R)

Théorème 4 : Soit R une relation binaire définie sur un ensemble E. Alors

- $r(R)= R\cup\Delta$ où Δ est la relation « égalité » sur E
- $s(R)= R\cup R^{-1}$ où R^{-1} est la relation réciproque de R
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3$…..

Remarque 5 : Soit R une relation binaire définie sur un ensemble E. Alors $(x,y)\in t(R)$ si et seulement si il existe une suite c0, c1, c2, …, cn d'éléments de E où $n\geq 1$, c0=x et cn=y et telle que $0\leq i<n$ ciRci+1 (notion de chemin).

Notation 2 : On note R+ la fermeture transitive de R et R* la fermeture réflexive et transitive de R.

3. Relations d'équivalence

Définition 12 : Une relation binaire dans un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 13 : Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E et $x \in E$. On appelle classe d'équivalence de x par R (ou modulo R) et on note χ l'ensemble $\chi = \{y \in E \text{ tq } xRy\}$.
Un élément d'une classe d'équivalence est appelé représentant de cette classe d'équivalence. L'ensemble de toutes les classes d'équivalence est appelé ensemble quotient de E par R. On le note E/R.

Remarque 6 : Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E et $x \in E$. On a : $\chi \subset E$, $\chi \in E/R$, $E/R \subset P(E)$

Lemme 1 : Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E et x et y deux éléments de E. Alors$\chi = \gamma \Leftrightarrow x \, R \, y$

Proposition 3 : Toute relation d'équivalence dans un ensemble E détermine une partition de E. Inversement toute partition de E détermine une relation d'équivalence dans E.

4. Relations d'ordre

Définition 14 : Une relation binaire dans un ensemble E est une relation de préordre si elle est réflexive et transitive. C'est une relation d'ordre si en plus elle est antisymétrique.
Une relation d'ordre est totale si $(\forall (x,y) \in E^2) \quad (xRy) \vee (yRx)$.
Elle est dit partielle dans le cas contraire.

Définition 15 : Un couple (E,R) formé d'un ensemble E et d'une relation d'ordre R est appelé ensemble ordonné. Si R est totale l'ensemble est dit totalement ordonné.

Notation 3 : Soit (E, R) un ensemble ordonné et $(x,y) \in E^2$. On note :

- $[x , y] = \{z \in E \text{ tq } (xRz) \wedge (zRy)\}$
- $[x , y[= \{z \in E \text{ tq } (xRz) \wedge (zRy) \wedge (z \neq y)\}$
- $]x , y] = \{z \in E \text{ tq } (xRz) \wedge (zRy) \wedge (z \neq x)\}$
- $]x , y[= \{z \in E \text{ tq } (xRz) \wedge (zRy) \wedge (z \neq x) \wedge (z \neq y)\}$
- $[x , \rightarrow[= \{z \in E \text{ tq } xRz\}$
- $]x , \rightarrow[= \{z \in E \text{ tq } (xRz) \wedge (z \neq x)\}$
- $]\leftarrow, x] = \{z \in E \text{ tq } zRx\}$
- $]\leftarrow, x[= \{z \in E \text{ tq } (zRx) \wedge (z \neq x)\}$

Terminologie 1 : Soit (E, R) un ensemble ordonné et $(x,y) \in E^2$.

- On dit que x et y sont comparables si (xRy) ou (yRx). Ils sont dits non comparables dans le cas contraire.
- Si xRy on dit que x est inférieur à y ou que y est supérieur à x.
- Si xRy et $y \neq x$ on dit que x est strictement inférieur à y ou que y est strictement supérieur à x.
- On dit que y est un successeur immédiat de x (ou que y couvre x) si x est strictement inférieur à y et il n'existe pas de z tel que x soit strictement inférieur à z et z soit strictement inférieur à y. On dit alors que x est un prédécesseur immédiat de y (ou que x est couvert par y).

Définition 16 : Soit (E,R) un ensemble ordonné et A une partie de E.

- $a \in A$ est un élément maximal de A s'il n'existe pas de $y \in A$ tel que aRy et $y \neq a$.

· b∈A est un élément minimal de A s'il n'existe pas de y∈A tel que yRb et y≠b.

<u>Diagramme de Hasse</u> : un ensemble ordonné (E, R) où E est fini peut être représenté par un diagramme où la réflexivité et la transitivité sont implicites. Chaque élément de E est représentée par un point, un segment (ou arc) joignant deux points x et y représente xRy . On utilise le « haut » et le « bas » (la « gauche » et la « droite ») pour se passer d'un sens fléché.

· Le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné s'obtient en procédant de proche en proche à partir des éléments maximaux et de leurs prédécesseurs immédiats.

· Le diagramme d'un ensemble totalement ordonné s'appelle une chaîne

· Une partie A d'un ensemble ordonné est une chaîne maximale si

1) C'est une chaîne de E

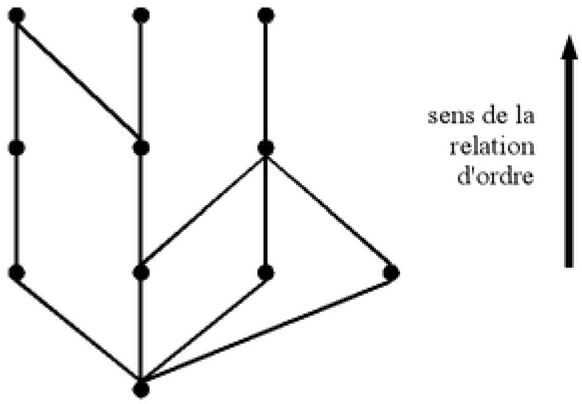
2) Il n'existe pas de chaîne B telle que AB.

Pour dessiner un diagramme de Hasse :

* On représente les éléments de l'ordre par des points.
* Si un élément x est plus grand qu'un autre élément y selon « ≤ », on place la représentation de x plus haut que celle de y.
* Le fait que deux éléments sont en relation est représenté par un segment entre ces deux points. Du fait de la disposition des points, on n'a pas besoin d'orienter ces segments avec une flèche (on sait qu'on va du bas vers le haut).
* Pour ne pas charger le schéma, on ne représente pas toute la relation d'ordre, mais seulement sa réduction réflexive transitive : d'une part si $x \le y$, mais qu'il existe z différent de x et de y tel que $(x \le z) \wedge (z \le y)$, alors on ne trace pas le segment entre x et y ; d'autre part on ne représente pas les boucles d'un élément vers lui-même.
* On veille autant que possible à ne pas croiser les segments.

En cas d'ordre infini, on peut néanmoins aussi utiliser le diagramme de Hasse pour représenter une restriction finie de l'ordre.

* Exemple de diagramme de Hasse :



Ici, on a représenté un ensemble ordonné de 11 éléments avec trois éléments maximaux, et un minimum (qui est donc aussi un minorant de l'ensemble et sa borne inférieure).

<u>Définition 17</u> : Soit (E, R) un ensemble ordonné et A une partie de E.

· On dit qu'un élément x de E est un majorant (resp minorant) de A si (∀y∈A) yRx.
(resp (∀y∈A) xRy.)

· Si l'ensemble des majorants (resp minorant) de A est non vide on dit que A est majoré (resp minoré).

· Une partie A majorée et minorée est dite bornée.

Définition 18 : Soit (E, R) un ensemble ordonné et A une partie de E.
· On dit que m est un minimum (ou plus petit élément) de A si m est un minorant de A et $m \in A$. On note m = min(A).
· On dit que M est un maximum (ou plus grand élément) de A si M est un majorant de A et $M \in A$. On note M = max(A).

Remarque 7 : Si A admet un plus petit (resp plus grand) élément alors cet élément est unique.

Définition 19 : Soit (E,R) un ensemble ordonné et A une partie de E.
· Si A est majoré et si l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément alors ce dernier est appelé borne supérieure de A et on note SupA.
· Si A est minoré et si l'ensemble des minorants de A possède un plus grand élément alors ce dernier est appelé borne inférieure de A et on note InfA.

Remarque 8 : Si A admet un plus grand (resp plus petit) élément alors on a maxA = SupA (resp minA = InfA).

Définition 20 : On appelle treillis un ensemble ordonné (E,R) tel que toute paire {x,y} d'éléments de E possède une borne supérieure (notée x+y) et une borne inférieure (notée x.y)

Définition 21 : Soit (E,R1) et (F,R2) deux ensembles ordonnés et f une application de E dans F. On dit que f est croissante (resp décroissante) si pour tout couple (x,y) de E^2 tel que xR1y on a f(x)R2f(y) (resp f(y)R2f(x)).

Proposition 4 :
· La composée de deux applications croissantes est croissante.
· La composée de deux applications décroissantes est croissante.
· Si f est une bijection croissante sa réciproque n'est pas nécessairement croissante.